GENEROLO JONO ŽEMAIČIO LIETUVOS KARO AKADEMIJA

Algirdas Ažubalis

LOGIKA IR MOKYKLINĖ MATEMATIKA

MONOGRAFIJA

Vilnius 2008

Monografijoje analizuojami mokinių loginio mąstymo ugdymui keliami reikalavimai, kurie nurodomi pagrindiniuose vidurinės mokyklos darbą reguliuojančiuose dokumentuose. Aptariama, kaip formaliosios logikos metodais galima įgyvendinti tuos reikalavimus mokant matematikos. Pateikiama autoriaus 2004–2007 m. atlikto pradinių ir vyresniųjų klasių matematikos pamokų stebėjimo bei mokytojų apklausos kai kuriose Lietuvos mokyklose analizė. Taip pat pateikiama Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademijos kariūnų stebėjimo 2000–2007 m., autoriui dėstant jiems logiką ir integruojant jos teiginius su kariūnų turimomis mokyklinės matematikos žiniomis, rezultatų analizė. Monografija galės naudotis kariūnai, kolegijų ir aukštųjų mokyklų studentai, besirengiantys tapti pradinių klasių ar vyresniųjų klasių matematikos mokytojais, atitinkamų specialybių magistrantai, doktorantai, mokytojai ir dėstytojai.

Recenzavo:
Šiaulių universiteto profesorius dr. **Arkadijus Kiseliovas** ir Lietuvos žemės ūkio universiteto Profesinės pedagogikos ir psichologijos katedros vedėjas prof. dr. **Sigitas Daukilas**

Atsakingoji redaktorė Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademijos Humanitarinių mokslų katedros docentė dr. **Audronė Petrauskaitė**

Monografija apsvarstyta ir jos leidimui pritarta Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademijos Humanitarinių mokslų katedros posėdyje 2007-12-20 (protokolo Nr. VN-14(2).

ISBN 978–9955–423–78–2

TURINYS

ĮVADAS

Baigiasi antrasis atgautos Lietuvos nepriklausomybės dešimtmetis. Daug padaryta savarankiškai tvarkantis visose visuomenės gyvenimo srityse. Daug nuveikta ir vienoje svarbiausių sričių – švietimo sistemoje: nustatytos bendrosios mokyklos reformos kryptys, sukurtos bendrosios programos ir nustatyti siektini išsilavinimo standartai [34 a, b], visiems mokomiesiems dalykams parašyti nauji, originalūs, tautiniai lietuviški vadovėliai, kai kuriems mokomiesiems dalykams – net po kelis, o tai jau leidžia ir švietimo sistemoje funkcionuoti rinkos dėsniams. Mus domina vienas švietimo reformos aspektas – loginio mąstymo ugdymas mokant mokyklinės matematikos kurso vidurinėje mokykloje. Šiuo aspektu mokytojams užduotys formuluojamos gana aiškiai: a) „Bendrosios programos ir išsilavinimo standartai“ formuluoja pagrindinius loginio mąstymo lavinimo uždavinius (skyrelyje „Pagrindiniai ugdymo uždaviniai“): „užtikrinti darnią prigimtinių moksleivio galių plėtotę, <...> atskleisti ir plėtoti kūrybines moksleivių galias, <...> ugdyti moksleivių gebėjimą kritiškai mąstyti, spręsti problemas, <...> ugdyti <...> pasitikėjimą savo jėgomis, <...> savarankiškumą, <...> nuostatą ir gebėjimą mokytis visą gyvenimą“ [34 a, p. 8]; b) to paties dokumento skyrelyje „Gebėjimai“, kuriuos reikia ugdyti mus dominančia tema, apibūdinami taip: „**kritiškai mąstyti ir spręsti problemas**, <...> racionaliai **planuoti** ir **organizuoti** veiklą, <...> **veikti** kūrybiškai, iniciatyviai, prasmingai ir savarankiškai, prisiimti atsakomybę už savo veiksmus“ [34 a, p. 10]; c) skyrelyje „Ugdymo procesas“ teigiama, kad reikia siekti, jog mokinys išsiugdytų tokias veikos kompetencijas, kad būtų galima teigti, jog jis: „ieško informacijos įvairiuose šaltiniuose, apibendrina, perteikia ją kitiems, <...> tyrinėja aplinką, kaupia išsamius ir visapusiškus duomenis, idėjas, faktus, juos grupuoja, klasifikuoja, analizuoja, sintetina, kritiškai vertina, <...> identifikuoja problemas, ieško jų sprendimų, <...> formuluoja hipotezes, tikrina jų pagrįstumą, <...> daro sprendimus ir juos koreguoja, atsižvelgdamas į besikeičiančias aplinkybes, <...> aiškina, pristato savo darbo rezultatus, <...> vertina užsibrėžtų tikslų įgyvendinimo sėkmingumą“ [34 a, p. 12]. Reikalavimai iš tiesų gana dideli ir keliami jie ne vidurinę, o pagrindinę mokyklą baigiančiajam mokiniui. Antra vertus, pagrindinė mokykla – dešimtmetė, paprastai ji baigiama sulaukus septyniolikos. SSRS slaviškose respublikose ilgą laiką tokia buvo vidurinė mokykla, po kurios jau buvo galima stoti į aukštąją mokyklą. Taigi, lyginant su tų laikų slaviškų mokyklų abiturientais, kuriems, be abejo, buvo formuluojami panašūs reikalavimai, mūsų abiturientai turi dar dvejus metus visoms savo kompetencijoms tobulinti. Apžvelgsime, kokius reikalavimus šis dokumentas kelia matematikos mokymui pradinėse ir vyresniosiose klasėse mus dominančiu loginio mąstymo ugdymo aspektu. Bendrieji matematikos mokymo pradinėje mokykloje tikslai formuluojami taip:

- „ugdyti moksleivių matematinius problemų sprendimo, mąstymo ir komunikacinius gebėjimus;
- padėti moksleiviams išmokti matematines sąvokas ir procedūras taip, kad jie suprastų jų ryšius ir būtų pajėgūs taikyti žinias;
- sudominti moksleivius matematika, formuoti teigiamą požiūrį į ją“ [34 a, p. 315].

Baigdami pradinę mokyklą moksleiviai turi gebėti:

- „paprasčiausiais atvejais taikyti matematinio mąstymo elementus;
- bendrauti vartodami matematines sąvokas ir matematinius informacijos užrašymo būdus;
- matematiškai tirti realias situacijas, spręsti jų patirtį ir interesus atitinkančias kasdienio gyvenimo problemas, remdamiesi išoriniais ir vidiniais matematikos ryšiais;
- taikyti konkrečias aritmetikos, geometrijos, matavimų, algebros ir statistikos žinias, mokėjimus ir įgūdžius, spręsdami praktinius ir formalius matematinius uždavinius;
- suprasti ir įvertinti matematikos svarbą ir taikymo galimybes kasdieniame žmogaus gyvenime bei profesinėje veikloje;
- mokytis matematikos“ [34 a, p. 315].

Mokinių vertybinės nuostatos, kurias reikia ugdyti, yra: „Kūrybiškumas, atvirumas naujoms idėjoms, sąžiningumas, tiesos siekimas, smalsumas, išradingumas ir darbštumas“ [34 a, p. 315–316]. O jos išugdomos palaipsniui, tam reikėtų:

- „ugdyti teigiamą jų požiūrį į matematiką;
- skatinti vertinti matematinį mąstymo pobūdį;
- ugdyti pasitikėjimą savo matematinėmis žiniomis ir gebėjimais jas taikyti;
- skatinti vertinti ekonominį racionalumą;
- ugdyti protiniam darbui reikalingą sąžiningumą, objektyvumą, atkaklumą, kūrybiškumą;
- ugdyti savigarbą ir pagarbą kitiems, savarankiškumą“ [34 a, p. 316].

Kadangi bendrųjų gebėjimų ugdymas yra vienas iš svarbiausių šiuolaikinių švietimo tikslų, tai dėl itin plataus pobūdžio jie negali būti išvystyti mokant vieno mokomojo dalyko, o turi būti ugdomi mokantis visų dalykų. Tačiau šiuolaikinėje matematikos didaktikoje išskiriami šie labiausiai su matematiniu ugdymu susiję bendrieji gebėjimai: „**matematinio mąstymo, matematinės komunikacijos ir problemų sprendimo**, kurių ugdymuisi ir plėtojimui sąlygos turi būti sudarytos mokantis matematikos jau pradinėje mokykloje“ [34 a, p. 316]. Tad jau pradinukai turi būti mokomi:

- „matematiškai mąstyti: suprasti matematikos sąvokas bei jų ryšius, sudaryti paprasčiausius algoritmus, formuluoti prielaidas ir spėjimus, nustatyti dėsningumus, argumentuoti ir apibendrinti;

- naudotis matematiniu žodynu ir simboliais taip, kad galėtų skaityti ir suprasti matematinius tekstus, apibūdinti matematinius objektus ir procedūras, reikšti mintis ir diskutuoti matematiniais klausimais;
- naudotis vidiniais ir išoriniais matematikos ryšiais, sprendžiant kasdienio gyvenimo ir matematines problemas;
- matematiškai tirti realias situacijas ir problemas, rasti racionalius jų sprendimo būdus, t. y. mokytis formuluoti problemą, aiškintis jos esmę, rasti sprendimo būdą, jį realizuoti, numatyti galimus rezultatus, juos patikrinti ir interpretuoti;
- atlikti standartines matematines procedūras: skaičiuoti, matuoti, apytiksliai numatyti atsakymus, apdoroti duomenis, transformuoti, palyginti ir klasifikuoti matematinius objektus“ [34 a, p. 316].

Dar sudėtingesni reikalavimai iškyla vyresniųjų klasių matematikos mokytojui: „Matematika yra svarbi šiuolaikinio žmogaus ugdymo sritis. Žinomų matematikos sąvokų, matematinių modelių, metodų, ryšių įvairioms situacijoms analizuoti supratimas bei taikymas sudaro prielaidas ne tik pažinti pasaulį, perimti šimtmečiais susiformavusią žmogaus mąstymo bei veiklos kultūrą, bet ir padeda individui jo praktinėje veikloje formuluoti matematines prielaidas, hipotezes, vertinti savo bei kitų individų loginių argumentų tinkamumą bei patikimumą, taigi prisitaikyti prie nuolat kintančios tikrovės. Gebėjimo susigaudyti informacijos jūroje bei priimti tinkamus sprendimus pagrindinėje mokykloje formavimas siejamas su tam tikros moksleivių matematinės kompetencijos ugdymu. Ši samprata apima ne tik kiekvieno moksleivio matematinio raštingumo įgijimą, matematinių gabumų plėtojimą, bet ir moksleivio norą bei gebėjimą nuolatos aktyviai mokytis“ [34 a, p. 331]. Tad pirmiausia būtina pasiekti, kad mokydamiesi pagrindinėje mokykloje visi mokiniai taptų matematiškai raštingi: „mokėtų pagrindines matematines sąvokas ir procedūras, gebėtų atpažinti matematinius objektus ir juos pavaizduoti, pritaikyti standartinius ar jau taikytus sprendimo algoritmus naujai užduočiai spręsti, matematiškai tirti paprastas praktines situacijas, pagrįsti sprendimus, argumentuoti, remtis analogijomis, įvairiais būdais (grafikais, simboliais, lentelėmis ir pan.) pateikta informacija bei gebėtų ją šiais būdais perteikti“ [34 a, p. 331]. Svarbu plėtoti kiekvieno mokinio matematinius gabumus, sudaryti sąlygas gabiausiems mokiniams atsiskleisti, pademonstruoti savo galimybes: „Moksleiviai turėtų tapti išsilavinusiais matematinių metodų vartotojais ir įgyti matematikai būdingo mąstymo ir kūrybos pradmenis“ [34 a, p. 331]. Neatsižvelgiant į gabumus, baigiantys pagrindinę mokyklą mokiniai turi pajusti matematikos grožį bei praktinę naudą. Tad „*pagrindinėje mokykloje kiekvienas moksleivis turi patirti sėkmę mokydamasis matematikos, o matematikos ugdymo turinys, jo perteikimo būdai ir tam naudojami metodai turi padėti moksleiviui susiformuoti į mokymosi sėkmę ir matematikos mokymosi prasmingumą orientuotas nuostatas bei bendruosius ugdymo tikslus atitinkančių vertybių sistemą*“ [34 a, p. 331]. Kadangi mokant matematikos turi būti siekiama ne tik bendrųjų ugdymo tikslų – siekti vertybinių nuostatų, gebėjimų bei įgūdžių brandos, tai yra suformuluotas ir pagrindinis matematikos mokymo tikslas – suteikti galimybę moksleiviams:

- „ugdytis bendruosius matematinius gebėjimus;
- ugdytis specialiuosius gebėjimus, susijusius su įvairiomis matematikos sritimis;
- domėtis matematika, formuotis deklaruojamas bendrojo ugdymo turinyje nuostatas ir vertybines orientacijas“ [34 a, p. 332].

Tikslų realizavimas susietas su tam tikrais laukiamais rezultatais. Reikia siekti, kad mokiniai, baigdami pagrindinę mokyklą:

- „įvaldytų matematinio mąstymo elementus, išmoktų bendrauti vartodami matematines sąvokas ir matematinius informacijos užrašymo būdus, naudotis matematiniu žodynu ir simboliais, išmoktų matematiškai tirti paprastas realias situacijas ir spręsti paprastas gyvenimo problemas, suprastų ir panaudotų vidinius ir išorinius matematikos ryšius;
- įgytų skaičių ir skaičiavimų, ekonomikos elementų, geometrijos, matavimų, algebros, funkcijos ir funkcinių sąryšių, statistikos, kombinatorikos, tikimybių teorijos konkrečių žinių tiek, kad galėtų savarankiškai spręsti praktinius ir matematikos uždavinius;
- suprastų matematikos svarbą visuomenės gyvenime, pritaikomumą įvairiose žmonių praktinės veiklos srityse, moksluose, technikoje, suprastų ir vertintų matematikos objektyvumą, kūrybiškumą, išsiugdytų išradingumą, smalsumą, atkaklumą, valingumą, norą, atsakomybę ir gebėjimą mokytis“ [34 a, p. 332].

Vertybinių nuostatų ugdymo klausimu dokumente rašoma: „Geras matematikos mokymas ne tik ugdo moksleivio gebėjimus, lavina intelektą ir formuoja bendruosius darbo įgūdžius, bet ir plėtoja jo vertybines nuostatas, stiprina nusiteikimą bei gebėjimą mokytis. Kūrybiškumas, atvirumas naujoms idėjoms, sąžiningumas, tiesos siekimas, smalsumas, išradingumas, darbštumas, savarankiškumas bei gebėjimas bendradarbiauti su kitais – tai vertybės, kurias ugdo tinkamai parinktas matematikos mokymo turinys ir mokymo(si) būdai“ [34 a, p. 332]. Tad vertybinėje srityje mokydamasis matematikos mokinys turi:

- „ugdytis teigiamą požiūrį į matematiką, mokslą ir technologiją, domėtis šių sričių laimėjimais;
- ugdytis pasitikėjimą savo matematikos žiniomis ir gebėjimu jas taikyti;
- susipažinti su profesijomis, susijusiomis su matematika, tiksliaisiais mokslais ir technologijomis, matematikos, tiksliųjų ir gamtos mokslų bei technologijų svarba profesinei veiklai;
- ugdytis mokslinę pasaulėžiūrą, atvirumą, objektyvumą, pakantumą nežinomy-

bei, išradingumą, žinių troškimą, nusiteikimą nuolatinei kaitai, poreikį mokytis;
- ugdytis bendradarbiavimo įgūdžius“ [34 a, p. 332–333].

Toliau dokumente pabrėžiama, kad „Įgytų žinių kiekis ir mokėjimas gerai atlikti standartines procedūras ne visada lemia moksleivių sėkmę toliau studijuojant ar dirbant, nes naujų žinių ir informacijos srautas sparčiai didėja. Ši tendencija ypač ryški šiandien, besikuriančioje informacinėje visuomenėje. Vis svarbesni darosi universalūs moksleivių gebėjimai – bendrieji gebėjimai, padedantys moksleiviams sėkmingai toliau mokytis ir taikyti tarpusavyje susijusias žinias, patiems pažinti, atrasti, dalyvauti priimant sprendimus kasdieniame gyvenime ar profesinėje veikloje. Šiuolaikinėje matematikos didaktikoje įprasta skirti tris svarbiausius bendruosius matematinius gebėjimus – *problemų sprendimo, matematinio mąstymo ir matematinio komunikavimo.* Glaudžiai su bendraisiais gebėjimais susijęs ir moksleivių įgytų *žinių integruotumas (dalykinis, tarpdalykinis bei sociokultūrinis)*. Jis svarbus įgyvendinant visuminio ugdymo principus“ [34 a, p. 333]. Taigi dokumentas reikalauja, kad, mokydamasis matematikos, moksleivis turėtų:

- „ugdytis gebėjimą matematiškai mąstyti (mokytis suprasti ir įvaldyti naujas sąvokas ir žodyną, konstruoti algoritmus, apibendrinti sąvokas ir rezultatus, argumentuoti bei įrodinėti);
- mokytis naudotis matematiniu žodynu ir simboliais taip, kad gebėtų skaityti ir suprasti matematinius tekstus, aprašyti matematinius objektus ir procedūras, reikšti mintis ir diskutuoti matematiniais klausimais;
- ugdytis gebėjimą matematiškai tirti problemas ir rasti racionalius jų sprendimus (nagrinėti probleminę situaciją, formuluoti problemą, aiškintis jos esmę, rasti sprendimo būdą, jį realizuoti, numatyti galimus vienokio ar kitokio sprendimo būdo pritaikymo rezultatus, patikrinti gautą matematinio uždavinio atsakymą, interpretuoti jį pradinės problemos terminais, išsiaiškinti praktinę matematinių rezultatų vertę konkrečiai probleminei situacijai);
- mokytis naudotis vidiniais ir išoriniais matematikos ryšiais taip, kad gebėtų atpažinti ekvivalenčias sąvokas ir procedūras, rasti įvairių matematikos temų ryšius bei matematikos ir kitų disciplinų ryšius;
- mokytis atlikti standartines operacijas, tokias kaip ilgio, ploto, tūrio ir kitų dydžių matavimas, skaitmeninių reiškinių reikšmių skaičiavimas, algebrinių reiškinių pertvarkymas, funkcijų reikšmių skaičiavimas, funkcijų tyrimas, grafikų brėžimas, įvairių mokykloje nagrinėjamų matematinių objektų palyginimas, klasifikavimas ir transformavimas, apytikslis atsakymo prognozavimas, statistinių duomenų apdorojimas ir pan.“ [34 a, p. 333].

Dokumente akcentuojami šie svarbiausi matematikos mokymo(si) didaktiniai aspektai:

- Žinių įgijimas: „*Šiuolaikinės matematikos žinios suvokiamos ne tik kaip faktai, sąvokos, teoremos ar standartiniai algoritmai, bet ir kaip geras matematikos supratimas.* Žinios yra tikrai vertingos ir veiksmingos tik jei moksleivis jas supranta, geba interpretuoti ir taikyti, jei suvokia, kodėl mokosi matematikos. Didėjant informacijos kiekiui ir tobulėjant informacinėms technologijoms vis svarbiau darosi ne tiek įsiminti gausybę faktų, kiek atpažinti situacijas bei klausimus, į kuriuos gali atsakyti ar jau atsakė matematika, ir susirasti reikiamą informaciją“ [34 a, p. 334].
- Matematinių modelių kūrimas bei taikymas. Šis aspektas plačiau dokumente nekomentuojamas.
- Matematikos teikiamų galimybių perteikti informacijai panaudojimas: „*Ugdant gebėjimus spręsti problemas, moksleiviai dažniau turėtų susidurti su būtinybe rinkti papildomus duomenis, mokytis spėti, nebijoti klysti, rasti savo klaidas, pagrįsti spėjimus.* Todėl reikėtų kartu su kitų dalykų mokytojais parinkti problemas, kurioms išspręsti prireiktų kelių dienų ar savaičių, bendro ar grupinio darbo, gebėjimo naudotis technika (ypač kompiuteriu), atlikti tyrimus, o ne vien mechaniškai taikyti žinias“ [34 a, p. 333].
- Matematikos plėtros procesas. Jis dokumente komentuojamas labai trumpai – tai „procesas, kuriam vykstant atrandami ir pagrindžiami matematiniai dėsningumai, kaupiamos ir apibendrinamos matematikos žinios“ [34 a, p. 334].
- Vidinių bei išorinių matematikos ryšių panaudojimas: „*Nuodugniam matematikos suvokimui ir gebėjimui sėkmingai ją taikyti įtakos turi pačios matematikos vidinių ir tarpdalykinių ryšių atskleidimas. Mokykloje matematikos temos turėtų būti išdėstytos taip, kad moksleiviai atpažintų įvairiai pateiktas sąvokas ir operacijas* (pavyzdžiui, ½, 0,5 ir 50 %; funkcijos grafiko susikirtimo su Ox ašimi taškų abscisių ir lygties f(x) = 0 sprendinių ieškojimas). Išmokę pereiti nuo vieno problemos sprendimo ar matematikos sąvokos pateikimo būdo prie kito, moksleiviai įgis lankstų ir reikšmingą problemų sprendimo įrankį, geriau supras matematikos esmę, formalių veiksmų, matematinių idėjų ir realaus pasaulio ryšį. Dažnai geriau mokėti vieną uždavinį išspręsti keliais būdais, nei kelis – tuo pačiu būdu. Ne mažiau svarbu mokytis įžvelgti matematikos metodų universalumą, suvokti, kad tie patys metodai gali būti taikomi įvairių tipų uždaviniams spręsti.

Pravartu moksleiviams parodyti, kaip kituose dalykuose ar realiame pasaulyje iškilusios probleminės situacijos modeliuojamos matematikoje“ [34 a, p. 334].

Pabrėžiama, kad matematikos metodų universalumas išryškėja geriausiai tada, kai jie taikomi kitų mokomųjų dalykų problemoms (uždaviniams) spręsti, ypač fizikoje, biologijoje, chemijoje ir geografijoje.

Ugdydama loginį mąstymą mokykla XI–XII klasėse „savo pastangas telkia **sa-**

varankiškam, atsakingam asmeniui, norinčiam ir pajėgiančiam visą gyvenimą mokytis, tobulinti savo gebėjimus, ugdyti, padeda jam įgyti asmeninę, pilietinę bei socialinę kultūrinę kompetenciją, būtiną sėkmingam tolesniam mokymuisi, įsitvirtinimui darbo, profesinės veiklos pasaulyje, kūrybingam dalyvavimui krašto pilietiniame, kultūriniame ir socialiniame gyvenime“ [34 b, p. 8]. Šioje srityje mokykla privalo sudaryti sąlygas, padedančias moksleiviui:

- „**plėtoti prigimtines asmens galias ir ypač žinių visuomenės nariui svarbius aukšto lygmens metakognityvinius (kritinio mąstymo, problemų sprendimo ir kt.) gebėjimus; <...>**
- **puoselėti pasitikėjimą savo jėgomis, iniciatyvumą, savarankiškumą, nusiteikimą imtis atsakomybės, nuostatą ir gebėjimą mokytis visą gyvenimą, tobulėti**“ [34 b, p. 8].

Bendrieji asmens gebėjimai mus dominančioje srityje toliau plėtojami: tobulinami „kritinio mąstymo ir problemų sprendimo įgūdžiai, ypač gebėjimas taikyti įvairias problemų sprendimo strategijas, remtis išsamia ir įvairiapusiška informacija, mokėjimas ją apdoroti, analizuoti, sintetinti, interpretuoti, vertinti, formuluoti hipotezes bei alternatyvas ir t. t.“ [34 b, p. 9]. Skyriuje „Didaktinės nuostatos“ teigiama: „XI – XII klasių ugdymo procesu siekiama kurti ugdymo aplinką, orientuotą į praktinį žmogaus patirties formavimosi kontekstą. Ši nuostata skatina mokyklos bendruomenę, pedagogą ugdymo procesą grįsti ***interpretaciniais***, o ne reprodukciniais ***metodais***. Kūrybinis, interpretacinis moksleivio santykis su mokomąja medžiaga reiškiasi aktyviu interpretacijos aktu, kurio turinį lemia mokomosios medžiagos įprasminimas moksleivio turimos patirties, aktualių poreikių ir interesų saistomame kontekste. Toks įprasminimas ženklina tikrą mokomosios medžiagos supratimą, o ne pažodinį jos įsiminimą, ugdo asmens kritinį mąstymą, puoselėja kritišką, dialogišką santykį su socialine kultūrine tradicija. Kritiškas interpretacinis santykis su ugdymo turiniu padeda moksleiviui ugdytis įsisąmonintas vertybines nuostatas ir principus, atsiremiančius į įvairių argumentų, alternatyvų kritinio svarstymo ir vertinimo išdavas.

Interpretacinė nuostata ugdo aktyviojo ugdymo būdus, padedančius moksleiviams savarankiškai aiškintis aplinkos pasaulį, vertinti, suprasti ir spręsti gyvenimo problemas, atsakingai veikti. Todėl tarp pedagogo didaktikos priemonių pagrindinę vietą turi užimti ugdymo metodai, akcentuojantys moksleivių veiklą, bendradarbiavimą, kūrybinę moksleivio ir pedagogo sąveiką, skatinantys savarankiškos, atsakingos asmenybės, jos kūrybinių galių sklaidą. Šiuo požiūriu ypač patrauklūs yra aktyviojo mokymosi metodai: mokymasis bendradarbiaujant mažose grupėse, bendrų projektų kūrimas ir įgyvendinimas, eksperimentiniai, mokslinio tyrimo gebėjimus ugdantys metodai, taip pat ugdymo metodai, kuriuos naudojant plačiai pasitelkiamos šiuolaikinės informacinės technologijos, kooperuotai atliekami, daugelį moksleivių įtraukiantys informacijos kaupimo, taikymo, apdorojimo, interpretacijos ir vertinimo darbai.

Suprantama, ugdymo metodų pasirinkimą lemia ne vien interpretacinis požiūris į ugdymo procesą, bet ir nemaža kitų veiksnių: kurso pobūdis <...> ir jam keliami uždaviniai, mokomojo dalyko specifika, ugdymo profilis ir pakraipa, mokyklos turima techninė bazė, ir, be abejo, moksleivio psichofizinės brandos ypatybės, interesai, gebėjimai, polinkiai. Šioje ugdymo aplinkoje mokytojo patirtis visada išlieka kompasu, padedančiu pasirinkti prasmingiausias ugdymo metodų paieškos linkmes“ [34 b, p. 16].

Pagrindiniai matematikos mokymo XI–XII klasėse tikslai yra:

- „perteikti moksleiviams tuos mąstymo ir veikimo elementus, kurie būdingi matematinei žmonijos kultūros šakai ir kurie būtini harmoningos asmenybės raidai bei visaverčiam gyvenimui šiuolaikiniame pasaulyje;
- sudaryti galimybes suvokti matematiką kaip žmonijos kultūros šaką ir veiksmingą mokslinio pasaulio pažinimo metodą;
- sudominti moksleivius matematika ir padėti kiekvienam iš jų tobulinti savo matematinius gabumus“ [34 b, p. 145].

Lietuvoje periodiškai atliekami tyrimai, kaip bendrųjų programų bei išsilavinimo standartų reikalavimai realizuojami praktikoje. Antai, remiantis 2005 m. nacionalinio IV klasių mokinių pasiekimų tyrimo duomenimis, teigiama, kad: a) „daugumos IV klasės mokinių matematikos žinios ir gebėjimai atitinka Išsilavinimo standartų reikalavimus; b) bendrieji matematikos testų rezultatai yra geri: mokiniai vidutiniškai išsprendė 55,4 % testo užduočių; (deja, tam optimizmui nelabai norisi pritarti, išspręstų užduočių procentas daugiau liudija apie rezultatų vidutiniškumą; tai liudija ir kita ištrauka iš ataskaitos – *A. A.*); c) palyginus 2003 m. ir 2005 m. nacionalinių IV klasės mokinių pasiekimų tyrimų matematikos testų rezultatus, ryškesnių skirtumų nenustatyta; d) aukštesni IV klasių mokinių matematikos mokymosi rezultatai sietini su matematikos mokytojų geru matematikos metodikos išmanymu <...>. Nustatyta, kad mokiniai geriausiai mokosi matematikos, kai mokytojas vaizdžiai pasakoja mokomąją medžiagą ir leidžia daug klausinėti, diskutuoti arba sudaro sąlygas mokiniams patiems kuo daugiau bandyti, tyrinėti ir atrasti; e) pedagoginėje praktikoje taikomi diferencijuoto mokymo būdai nepakankamai efektyvūs: gana daug mokinių dažnai atlieka užduotis, ne visiškai atitinkančias jų pasirengimą, patirtį bei interesus; f) nepakankami IV klasės mokinių matematinės komunikacijos bei problemų sprendimo strategijos pasirinkimo gebėjimai trukdo jiems siekti geresnių mokymosi rezultatų“ [93, p. 43]. Tad pradinių klasių mokytojams rekomenduota daugiau dėmesio skirti:

- „mokinių individualiam pažinimui bei mokymo diferencijavimui ir individualizavimui;
- <...>;
- matematiniam diskursui, sąlygoms mokiniams patiems bandyti, tyrinėti sudaryti, mokomajai medžiagai vaizdžiai pateikti;
- tvirtiems skaičiavimų įgūdžiams, skaičiaus jausmui formuoti;

- tiek sakytinės, tiek rašytinės matematinės komunikacijos gebėjimams ugdyti;
- mokiniams supažindinti su įvairiomis problemų sprendimo strategijomis ir jų taikymu;
- matematinio mąstymo gebėjimams ugdyti; mokymui paaiškinti, argumentuoti uždavinių sprendimus ir atsakymus, daryti pagrįstas išvadas, pratinti apmąstyti gautus sprendinius (ar jie logiški, tinkami), paaiškinimus bei argumentus sieti su pradiniu problemos kontekstu“ [93, p. 43].

Taigi reikalavimai pagrindiniuose matematikos mokymą reglamentuojančiuose dokumentuose [34 a, b] ir dokumente, tikrinančiame pirmųjų vykdymą [93], yra suformuluoti pakankamai aiškiai, bet, deja, jie yra abstraktūs ir neremiami jokiomis rekomendacijomis – juose nėra nurodyta jokios rekomenduojamos literatūros. Tačiau, be matematikos vadovėlių autorių siūlomų mokomosios medžiagos perteikimo loginės sekos, ypač vyresniųjų klasių matematikos mokytojai neturi jokio mokslinio didaktikos veikalo, kuris būtų vadovas šioje srityje, atskleistų loginę mokyklinės matematikos kurso prasmę, jo loginius pagrindus ir leistų mokytojams giliai juos suprasti. Sovietiniais metais buvo bandoma čia šiek tiek nuveikti, tačiau tiek lietuvių kalba [46], tiek rusų kalba [123, 127, 129, 138, 141] parašyti darbai jau yra tapę bibliografine retenybe, be to, dėl jų tuomet privalomo komunistinio politinio angažuotumo savo išoriniu apvalkalu jie yra svetimi dabartiniam pedagogui. Kiek geresnė pradinių klasių mokytojų padėtis: yra išleistas bendrosios pradinės matematikos didaktikos vadovėlis [9] ir skaičių bei skaičiavimų mokymo pradinėje mokykloje metodinė priemonė [42] studentams, šiais darbais naudojasi savišvietai ir mokytojai. Yra apginta daktaro disertacija [65], kurios autorė – pradinių klasių mokytoja ekspertė Danutė Kiseliova. Su vyru, Šiaulių universiteto (toliau – ŠU) profesoriumi dr. Arkadijum Kiseliovu, šios disertacijos pagrindu, gerokai ją išplėtusi, išleido monografiją [72, 73], kurioje išsamiai išanalizavo pradinių klasių mokinių matematinių gebėjimų diagnostikos problemas. Monografijoje aprašomi atlikti tyrimai, pradėti dar D. Kiseliovai rengiant daktaro disertaciją ir tęsti ją sėkmingai apgynus. Šie tyrimai yra organiškai susieti su autentišku pradinės matematikos mokymu(si), paisant tarpdalykinių ryšių su kitais mokomaisiais dalykais, bendru šalies švietimo vizijos kūrimu, mokinių pilnatvės (kūrybingumo, individualaus kritinio mąstymo, komunikacinių bei kitų galių plėtojimo ir kt.) ugdymu bei su pradinės mokyklos matematikai gabių mokinių pedagoginės globos turtinimu ir naujų ugdymo metodų paieškomis, su mokymusi visą gyvenimą. Pirmojoje monografijos dalyje [72], apibendrinant atliktų tyrimų rezultatus, panaudojant kitų autorių tyrimų medžiagą bei remiantis daugiamete autorių diagnostinių ir didaktinių testų konstravimo bei pedagoginio darbo patirtimi (doc. dr. D. Kiseliova pradinėje mokykloje dirbo ilgus metus, tapo mokytoja eksperte, kartu ėjo antraeiles, o dabar eina ir pagrindines pareigas dabartiniame ŠU, prof. dr. A. Kiseliovas daugelį metų dėstė matematikos pagrindus ir matematikos didaktiką būsimiesiems pradinių klasių mokytojams dabartiniame ŠU;

sovietiniais metais trejus metus dėstė Afrikoje, Alžyre), pateikiamos gebėjimų testų teorijos ir matematikos didaktikos žinios, apibūdinta pradinės mokyklos matematinių gebėjimų samprata, suformuluotos dalyko gebėjimų testo administravimo taisyklės ir sąlygos, parinkti statistinių testavimo rezultatų analizės metodai. Antrojoje monografijos dalyje [73] matematiškai gabių mokinių mokymo(si) problema implikuojama kaip tolydžiai kintantis pedagoginis procesas, kuriam būdingi naujumo, įvairumo siekiai ir šalies švietimo reformų specifikos atitikimas. Mokinių pedagoginės socialinės aplinkos tyrimas susietas su materialiniais ir dvasiniais mokinių ištekliais bei jų namų ir mokyklų materialine bei mokslo baze. Pagirtinos yra ir pradinių klasių mokytojams ir vaikų darželių pedagogams skirto žurnalo „Žvirblių takas" pastangos spausdinti daug pedagogikos mokslininkų ir mokytojų praktikų straipsnių, nagrinėjančių matematikos didaktikos, tarp jų ir loginio mąstymo ugdymo mokant pradinės matematikos klausimus [24, 29, 47, 53, 54, 56–59, 61–64, 66–68, 70, 71, 74–76, 81–87, 90, 92, 96–98, 104–107, 110]. Tačiau straipsniai periodikoje tiek dėl jų nedidelės apimties, tiek chaotiško išsidėstymo tematikos požiūriu tik per labai ilgą laiką gali išsamiai išanalizuoti kokią nors problemą. Praktiškai jokios periodinės spaudos pagalbos vyresnių klasių mokytojai nebeturi. Kol kas šio dalyko mokytojams siūloma tik daug pagalbinės didaktinės medžiagos, padedančios organizuoti kurso kartojimą, žinių kontrolę, pasirengimą egzaminams, tačiau jokios bendresnės, teorinės literatūros dar nėra išleista. Tačiau ugdant mokinių loginį mąstymą mokykliniam matematikos kursui užkraunama pagrindinė našta. Kiti mokomieji dalykai tenkinasi tik naujų sąvokų formavimu, jų santykių nustatymu, apibrėžimu ir klasifikacija bei nededukciniais samprotavimais, o mokyklinės matematikos kursas naudojasi visu logikos arsenalu iki dedukcinių samprotavimų ir įrodymų – aukščiausių mąstymo formų.

Šešerius metus dėstant logikos discipliną Vilniaus Gedimino technikos universitete (toliau – VGTU) ir septynerius – Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademijoje (toliau – LKA) teko tiesiogiai stebėti vidurinių mokyklų buvusių abiturientų loginio mąstymo išsivystymo lygį, jų gebėjimą suvokti ir apibendrinti jų pačių vartojamas mąstymo formas, pagrįsti jas mokykloje eitų dalykų, tarp jų ir matematikos, pavyzdžiais, suprasti aiškinimą, grindžiamą šiais pavyzdžiais. Jau darbo VGTU metu buvo suformuluota **tyrimo hipotezė**: turi egzistuoti itin glaudus ryšys tarp abiturientų mokyklinio matematikos kurso įsisavinimo lygio ir logikos dalyko įsisavinimo aukštojoje mokykloje sėkmės. Tad, pradėjus dirbti LKA, imtasi tyrimo. Pirmiausia, apibrėžtas **tyrimo tikslas**: ištirti, ar egzistuoja aukščiau minėtas ryšys, nustatyti sąlygas, kurios užtikrina mokyklinės matematikos ir logikos integracijos glaudumą.

Tyrimo tikslas pareikalavo suformuluoti tokius **tyrimo uždavinius**:

1. Susipažinti su pagrindine literatūra lietuvių ir užsienio kalbomis, nagrinėjančia logikos ir mokyklinės matematikos integracinius ryšius, parinkti iš jos tas mintis ir idėjas, kurios turi pereninę (pranc. „*pérennité*" – ilga trukmė) edukologinę

vertę, t. y. tinka ir dabartinei Lietuvos mokyklai, nors sąlygos, kuriomis buvo išsakytos aukščiau minėtos mintys bei suformuluotos idėjos, labai pasikeitė.

2. Stebėti LKA kariūnų logikos dalyko mokymosi procesą, kryptingai jam vadovaujant bei ten, kur galima, integruojant su mokyklinės matematikos kursu, kaupti duomenis apie matematikos mokymosi sėkmę vidurinėse mokyklose, lyginti juos su logikos dalyko įsisavinimo rodikliais.
3. Stebėti geriausių pradinių ir vyresniųjų klasių mokytojų vedamas matematikos pamokas siekiant nustatyti mokinių loginio mąstymo ugdymo galimybes mokantis matematikos Lietuvos mokyklose.
4. Tirti Lietuvos mokytojų turimas galimybes gerinti savo kvalifikaciją ugdant mokinių loginį mąstymą matematikos pamokose.

Tyrimo uždaviniai buvo įgyvendinti taikant šiuos **tyrimo metodus**:

1. Literatūros lietuvių ir užsienio kalbomis, analizuojančios loginio mokinių mąstymo ugdymo problemas mokantis matematikos, studijavimas.
2. Pradinių ir vyresniųjų klasių mokytojų pamokų Lietuvos miestų ir miestelių mokyklose stebėjimas, aptarimas, stebėjimo duomenų apibendrinimas.
3. Pradinių ir vyresniųjų klasių matematikos mokytojų anketinė apklausa, jos metu surinktų duomenų apdorojimas taikant matematinės statistikos metodus.
4. Statistinių duomenų apie LKA kariūnų mokyklinės matematikos ir logikos dalyko mokymosi sėkmę kaupimas, jų lyginamoji statistinė analizė matematinės statistikos metodais.

Tyrimo metu išstudijuoti aukščiau minėti „Žvirblių take“ paskelbti straipsniai, svarbiausi iki karo, sovietiniais metais ir atkurtoje nepriklausomoje Lietuvoje paskelbti bendrosios matematikos mokymo vidurinėje mokykloje metodikos darbai [5–7, 12–14, 46, 89, 108, 111] (kai kuriuos iš jų parašė šios monografijos autorius), rusų matematikos didaktikos darbai, išleisti dar caro valdymo ir sovietiniais metais [123, 126, 127, 130, 132, 138, 147, 148]. (Beje, Rusijos matematikos didaktika visada pasižymėjo giliais ryšiais su Vokietijos matematikos didaktika, kuri yra iš esmės šio dalyko gimtinė: dauguma rusų carienių turėjo gilias vokiškas šaknis, iš čia – gilūs carinės Rusijos ir kaizerinės Vokietijos kultūriniai, taigi ir edukologiniai ryšiai). Išstudijuoti taip pat ir užsienio pedagogų, psichologų ir matematikos didaktikos specialistų darbai, išleisti lietuvių, anglų ir prancūzų kalbomis [33, 36, 44, 45, 48–52, 55, 88, 95], taip pat rusų kalba [114, 117, 118, 120, 121, 124–126, 131, 134–137, 140, 145, 146]. (Beje, Rusija, kaip didelė valstybė, turėjo, turi ir turės galimybių leisti verstinius žymiausių užsienio edukologų, psichologų, matematikos didaktikos specialistų darbus ar jų apžvalgas, nes jie reikalingi daugeliui skaitytojų). Išstudijuoti ir žymiausių rusų pedagogų bei psichologų, rašiusių mus dominančia tema, darbai, išleisti lietuvių ir rusų kalbomis [109, 122, 128, 129, 133, 143, 144, 149]. Žymiausių monografijoje minimų matematikų biografiniai duomenys paimti iš Kijeve išleisto biografinio žodyno [119].

Susipažinta ir su mokslinių-praktinių konferencijų [99–103] darbais (kai kuriose – ir asmeniškai dalyvauta). Pasinaudota ir savosiomis anksčiau išleistomis monografijomis [5, 6, 12–14] bei vadovėliu [9]. Pirmajame monografijos skyriuje pateiktos būtinos minimalios logikos žinios (remiantis autoriaus parengta mokomąja knygele [10]) su pavyzdžiais iš mokyklinės matematikos, kad skaitytojui būtų lengviau suprasti II–VIII skyrius, kuriuose dėstomi matematikos didaktikos teoriniai klausimai, susiję su loginio mokinių mąstymo ugdymo mokantis matematikos problemomis, iliustruojant juos įvairiais praktiniais pavyzdžiais (kai kurie – iš autoriaus stebėtų pamokų). Dalis tų skyrių medžiagos parašyta, apibendrinus autoriaus moksliniuose leidiniuose paskelbtus straipsnius [2–4, 7, 15]. Siekdamas, kad monografija būtų suprantamesnė platesniam skaitytojų ratui, ypač studentams, autorius paaiškinti naudojamiems terminams – tarptautiniams žodžiams daugiausia naudojosi V. Vaitkevičiūtės parengtu Tarptautinių žodžių žodynu [112].

Anykščių ir Rokiškio rajonų mokyklose, Skuodo raj. Mosėdžio gimnazijoje, Vilniaus Antano Vienuolio pagrindinėje ir šv. Kristoforo vidurinėje mokyklose stebėtos rajonų ar mokyklų vadovų pasiūlytos geriausių pradinių klasių ir vyresniųjų klasių matematikos mokytojų pamokos: žiūrėta, kaip panaudojamos visos turimos galimybės (vadovėliai, pratybų sąsiuviniai, vaizdinės priemonės, dalijamoji medžiaga ir kt.) loginiam mokinių mąstymui ugdyti. Kadangi pamokų aptarimai baigdavosi autoriaus vedamais seminarais, kuriuose dalyvaudavo platesnis aukščiau nurodytų specialybių mokytojų ratas, tuo pasinaudojus buvo vykdoma seminaruose dalyvavusių mokytojų anketinė apklausa. Pamokų stebėjimo ir anketinės mokytojų apklausos rezultatai aptarti monografijos devintajame skyriuje, kai kuriuos tinkamiausius tam pavyzdžius panaudojant ir kituose skyriuose. Sukaupta tyrimo metu medžiaga paskelbta autoriaus moksliniame [18] ir trijuose mokslo populiarinimo straipsniuose [8, 11, 16].

2000–2007 m., dėstant logiką LKA kariūnams, fiksuoti kariūnų logikos mokymosi rezultatai, jų vidurinės mokyklos matematikos valstybinio egzamino (toliau – VE) pažymys ir mokyklos baigimo vieta: a) sostinė, apskrities centrai; b) rajonų centrai; c) mažesni miestai ir miesteliai. Nustatyti koreliaciniai ryšiai tarp šių ir kai kurių kitų parametrų, visa tai plačiai aptarta dešimtajame monografijos skyriuje. Autorius šia tema paskelbė du mokslinius straipsnius Lietuvoje [2, 17] bei vieną straipsnį Estijoje [116].

Tyrimo rezultatų **aprobavimas** realizuotas skelbiant straipsnius ir skaitant pranešimus šalies mokslinėse konferencijose: Lietuvos matematikų draugijos (2004, 2005, 2006), organizuotose Klaipėdos universiteto pedagogikos fakulteto (2004, 2006) [99, 101] ir LKA Vadybos katedros (2006), taip pat Talino pedagoginiame ir Šiaulių universitetuose vykusiose tarptautinėse konferencijose (2003, 2004).

Tyrimo **naujumas** pasireiškia tuo, kad pabandyta atskleisti integracinius ryšius, egzistuojančius tarp logikos ir mokyklinės matematikos, patikrinti, kaip tais ryšiais naudojasi studijuojantis logiką jaunimas.

Tyrimo **teorinis reikšmingumas** yra tas, kad pirmą kartą Lietuvos matematikos didaktikoje taip ryškiai akcentuojamas ir atskleidžiamas integracinių ryšių buvimas tarp logikos ir mokyklinės matematikos.

Tyrimo **praktinė reikšmė** yra ta, kad mokytojai, susipažinę su monografijoje išdėstyta medžiaga, galės kur kas sėkmingiau, sąmoningiau realizuoti tuos loginio mąstymo ugdymo uždavinius, kuriuos I–XII klasėse mokant matematikos kelia Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklų bendrosios programos ir išsilavinimo standartai, galės susipažinti su šia linkme dirbančių savo kolegų darbo patirtimi.

Monografijos pabaigoje pateiktos išvados, literatūros sąrašas, reziumė anglų kalba, pavardžių rodyklė, priedai (mokytojams pateiktos anketos).

Autorius dėkoja recenzentams: Šiaulių universiteto profesoriui dr. Arkadijui Kiseliovui ir Lietuvos žemės ūkio universiteto Profesinės pedagogikos ir psichologijos katedros vedėjui prof. dr. Sigitui Daukilui bei atsakingajai redaktorei Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademijos docentei dr. Audronei Petrauskaitei už vertingas pastabas, padėjusias patobulinti monografijos rankraštį. Rengiant rankraštį spaudai daug pasidarbavo Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademijos Humanitarinių mokslų katedros metodinio kabineto vedėja Rasa Gedminienė. Jai autorius irgi labai dėkingas.

Gerbiamus skaitytojus savo pastabas bei atsiliepimus autorius prašo siųsti adresu:

Algirdas Ažubalis, Tuskulėnų g. 44-20, 09209 Vilnius.

I. LOGIKOS ŽINIOS, KURIOMIS REMIASI MOKYKLINĖ MATEMATIKA

1. LOGIKOS OBJEKTAS

Logika tiria minčių struktūrą, jų ryšių dėsningumus. *Minties loginė struktūra* yra jos sudedamųjų dalių sujungimo būdas, bendras skirtingo turinio mintims. Mintys reiškiamos teiginiais, pastarieji tikrinami, ar yra teisingi (įrodomi). Tai atliekama taikant įvairius samprotavimų būdus. *Tad logika yra mokslas apie samprotavimo būdą.* Jos tikslas – nustatyti logines sąlygas įvertinti teisingumą, sukurti efektyvų loginio pažinimo metodą, nustatyti priemones, kurios leistų iš vienų teiginių išvesti kitus.

2. SĄVOKA

2.1. Sąvokos samprata

Sąvoka yra mąstymo forma, išreiškianti esminius ir bendruosius objektų požymius. *Esminiai objekto požymiai* tokie, kurių kiekvienas skyrium būtinas, o visų kartu pakanka, kad būtų galima tam tikrą objektą atskirti nuo kitų (net ir panašių) objektų. *Neesminiai objekto požymiai* tokie, kuriuos objektas gali turėti, tačiau jų neturėdamas nenustoja būti tuo, kuo jis yra. Tarkim, turime sąvoką ,,rombas". Jo esminiai ir neesminiai požymiai, surašyti į lentelę, atrodys taip:

1 lentelė

Esminiai požymiai	***Neesminiai požymiai***
Lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios	Didelis Mažas Jo smailusis kampas lygus 40° Jo įstrižainių susikirtimo taškas dalija jas pusiau ...

Bendrieji požymiai yra būdingi visiems tam tikros grupės objektams. Sąvokos reiškiamos žodžiais ar jų junginiais. Svarbiausios sąvokos charakteristikos – turinys ir apimtis. *Sąvokos turinys* – esminiai ir bendrieji objekto požymiai. *Sąvokos apimtis*

– visuma objektų, turinčių bendrus požymius. Taigi sąvokos „rombas“ apimtis – visi rombai, nubrėžti visose pasaulio knygose ir sąsiuviniuose, lentose ir t. t.

2.2. Loginė klasė (aibė)

Visuma objektų, turinčių bendrus požymius, vadinama *logine klase (aibe).* Ji gali būti sudaryta iš atskirų *elementų* ar jų darinių – *poklasių (poaibių).* Ta pati klasė (aibė) gali būti arba klasė (aibė), arba poklasis (poaibis), atsižvelgiant į tai, su kokia klase (aibe) ji santykiauja. Antai natūraliųjų skaičių aibė yra klasė (aibė) konkrečių natūraliųjų skaičių – jos elementų atžvilgiu. Bet ji bus poklasis (poaibis), įeinantis į realiųjų skaičių aibę. Pagal elementų skaičių klasės (aibės) skirstomos į:

1) *bendrąsias,* kurių elementų skaičius yra intervale $2 \leq x < \infty$; čia kaip geri pavyzdžiai yra jau minėtos natūraliųjų bei realiųjų skaičių aibės;

2*) vienines*, kurios turi 1 elementą, pavyzdžiui: 0, mažiausias dviženklis skaičius (10), didžiausias triženklis skaičius (999) ir t. t.;

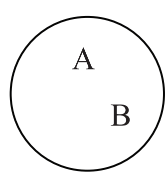
3) *tuščiąsias* (nulines), kurios neturi nei vieno elemento, pavyzdžiui: vasario 31-oji, dalmuo 5:0 ir t. t. Tokios klasės žymimos simboliu $\varnothing$, o visos kitos – raidėmis A, B, C... Sprendžiant konkrečius klausimus, operuojama klase (aibe), kuri visuomet mąstoma tam tikroje objektų srityje – *universaliojoje* (lot. *„universalis“* – visuotinis) *klasėje (aibėje).* Ji žymima raide E. Pavyzdžiui, pradinėse klasėse aritmetiniai veiksmai atliekami natūraliųjų skaičių aibėje, kuri tuo atveju laikoma aibe E.

Pabrėžiame, kad ypač matematikoje aibių priskyrimas kuriai nors iš aukščiau minėtų trijų rūšių yra sąlyginis ir labai priklauso nuo to, kiek skirstantysis yra susipažinęs su matematika. Antai nelygybės $2<x<3$ sprendinių aibė I klasės mokiniui bus tuščioji, tačiau XII klasės mokiniui ji bus bendroji.

2.3. Santykiai tarp loginių klasių (aibių)

Tarp loginių klasių gali būti keturių rūšių santykiai. Jie nusakomi žodžiais, vaizduojami Oilerio ir Veno* diagramomis ir užrašomi, vartojant specialius simbolius.

1) Dvi klasės (aibės) yra lygios, kai jos turi tuos pačius elementus. Šis faktas diagrama vaizduojamas taip:

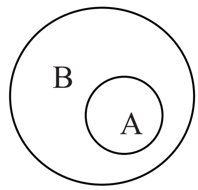


1 pav.

* Leonardas Oileris (*Euler*, 1707–1783) – šveicarų (vokiečių kilmės) matematikas; Džonas Venas (*Venn*, 1834–1923) – anglų logikas.

Užrašoma: $A=B$. Pavyzdžiui, A – lyginiai natūralieji skaičiai, B – natūralieji skaičiai, kurie dalijasi iš 2.

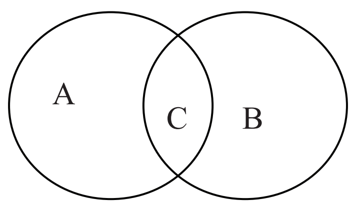
2) *Subordinacijos* santykis yra tada, kai viena klasė (aibė) sudaro dalį kitos klasės (aibės). Tada ši klasė (aibė) vadinama kitos klasės (aibės) *poklasiu (poaibiu),* o antroji klasė (aibė) – *plėtiniu.* Tai vaizduojama taip:



2 pav.

Užrašoma: $A \subset B$ (aibė A yra aibės B poaibis, aibė B yra aibės A plėtinys). Pavyzdžiui, A – trikampiai, B – plokštuminės geometrinės figūros. Beje, kai $A=B$, turime $A \subset B$, $B \subset A$.

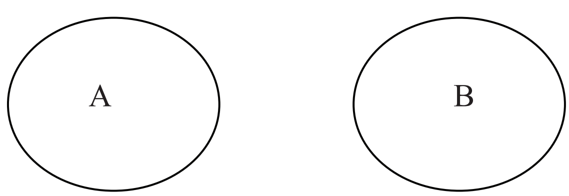
3) Klasių (aibių) *sankirta* vadiname klasę (aibę), sudarytą iš dviejų ar kelių klasių (aibių) elementų. Diagrama atrodo taip:



3 pav.

Užrašoma: $A \cap B = C$. Pavyzdžiui, A – rombai, B – stačiakampiai, tada C – kvadratai.

4) Nuošalės santykis yra tada, kai klasės (aibės) neturi bendrų elementų:



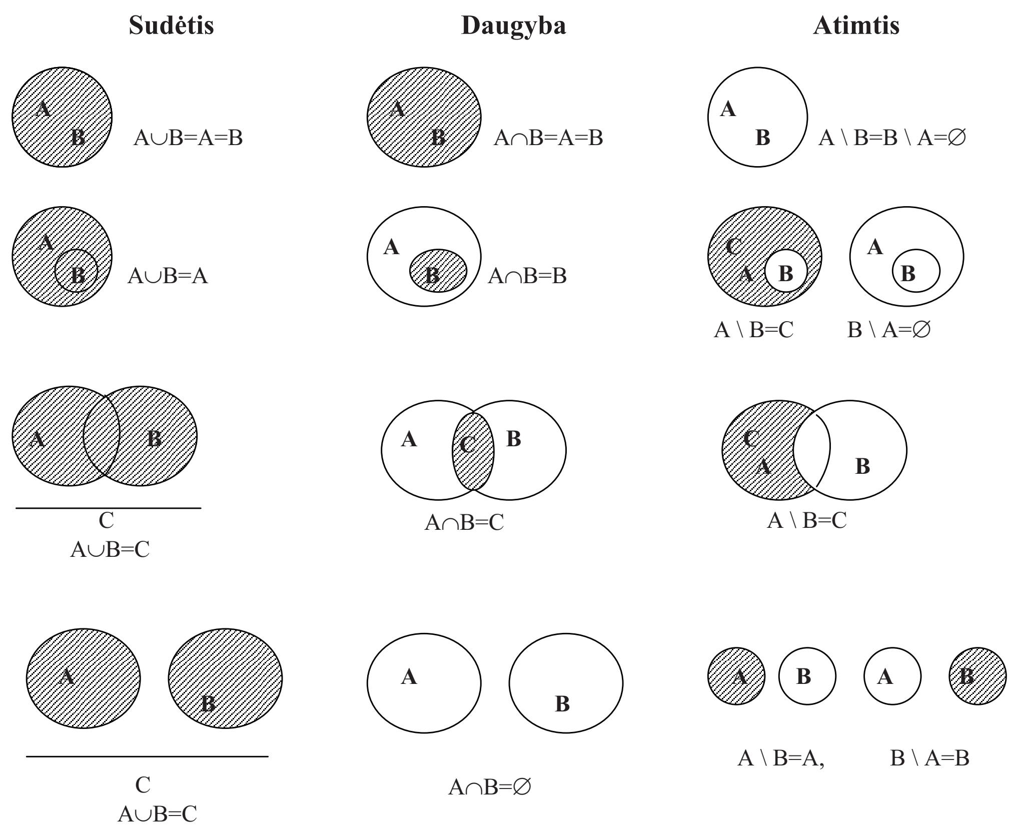
4 pav.

Užrašoma: $A \not\subset B$, $B \not\subset A$. Pavyzdžiui, A – trikampiai, B – skrituliai.

2.4. Veiksmai su loginėmis klasėmis (aibėmis)

Su klasėmis (aibėmis) galima atlikti veiksmus, kuriais iš vienos, dviejų ar daugiau klasių gaunama nauja klasė (aibė).

Klasių sudėtimi (sąjunga) vadinamas veiksmas, kuriuo iš sudedamųjų klasių gaunama tokia nauja klasė, kurią sudaro visi tų klasių elementai. Sudėtis (sąjunga) užrašoma: A ∪ B=C. *Klasių daugyba* yra bendrų elementų suradimas dauginamosiose klasėse. Daugyba ekvivalenti sankirtos radimui. *Klasių atimtimi* vadinamas veiksmas, kuriuo iš vienos klasės išskiriami elementai, sudarantys kitą klasę. Atimtis žymima A \ B=C. Visų trijų veiksmų rezultatai priklauso nuo to, koks santykis yra tarp klasių – veiksmų komponentų. Kai tų komponentų yra du, turėsime tokius atvejus:

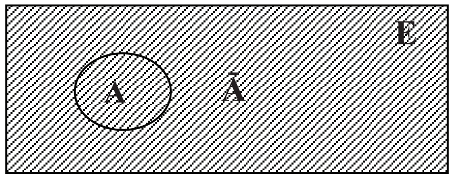


5 pav.

Skaitytojui siūlome savarankiškai, panaudojant skyrelio 2.3 pavyzdžius, atlikti veiksmus su juose duotomis aibėmis.

Klasės neigimu vadinamas veiksmas, kuriuo iš klasės A gaunama klasė ne A ($\bar{A}$ arba $\rceil A$).

$A \cup \rceil A = E$ (universalioji klasė):

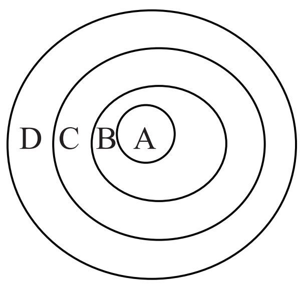


6 pav.

Pavyzdžiui, jei A – trikampiai, tai $\bar{A}$ – kitos plokštuminės geometrinės figūros (ne trikampiai). E – visos plokštuminės geometrinės figūros.

Dvigubas klasės neigimas lygiavertis pradinei klasei: $A = \rceil\rceil A$. Pavyzdžiui, ne netrikampiai – tai trikampiai.

Klasės apibendrinimas – veiksmas, kuriuo išplečiama klasės apimtis. Jei $A \subset B \subset C \subset D$, tai diagrama bus:



7 pav.

Apibendrinimo riba – plačiausios apimties klasės, vadinamos kategorijomis. *Kategorijos* (lot. *„categoria“*, gr. *„katēgoria“*– nurodymas, apibrėžimas) – tai abstrakčiausios kiekvienos mokslo šakos sąvokos. Pavyzdžiui, A – natūralieji skaičiai, B – sveikieji skaičiai, C – racionalieji skaičiai, D – realieji skaičiai.

Klasės susiaurinimas – tai veiksmas, kuriuo sumažinama klasės apimtis. Šis veiksmas yra atvirkščias apibendrinimui.

Klasės skirstymas yra klasės padalijimas į poklasius, remiantis tam tikru pagrindu. Poklasiai vadinami *skirstymo nariais. Skirstymo pagrindas* – požymis, kuriuo remiantis skirstoma. Skirstant laikomasi keturių taisyklių.

1) Skirstymas turi būti *tolygus:* skirstymo narių suma turi būti lygi skirstomajai klasei. Jei skirstymo narių yra daug ir jų visų išvardyti neįmanoma, paminėjus keletą jų naudojami žodžiai ir posakiai: „ir t. t.“, „ir pan.“, „ir kt.“. Pažeidus šią taisyklę, galimos dvi klaidos:

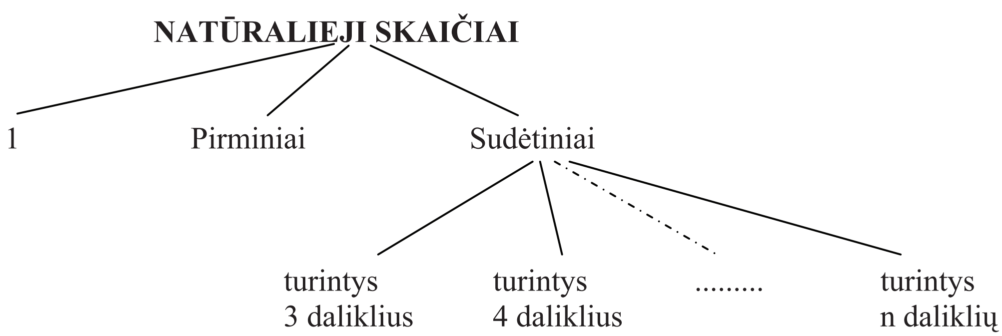
a) *neišsamus skirstymas* – nenurodomi visi skirstymo nariai, pavyzdžiui natūraliuosius skaičius skirstant į pirminius bei sudėtinius skaičius, nenurodomas trečiasis skirstymo narys – skaičius 1, kuris nepriskiriamas nei pirminiams, nei sudėtiniams skaičiams;

b) *skirstymas su nereikalingais nariais* – t. y. kai kurie nariai yra skirstymo narių poklasiai. Pavyzdžiui, jei keturkampius skirstytume į lygiagretainius, nelygiagretainius ir stačiakampius, tai paskutinis narys būtų nereikalingas, nes stačiakampiai yra lygiagretainių poklasis.

2) Skirstyti reikia *vienu pagrindu.*

3) Skirstymo nariai turi *šalinti* vienas kitą: bet kuris skirstomosios klasės elementas turi priklausyti tik vienam skirstymo nariui, o tarp skirstymo narių turi būti nuošalės santykis. Ši taisyklė dažniausiai pažeidžiama, pažeidus antrąją taisyklę. Pavyzdžiui, jei trikampius skirstytume į stačiuosius, bukuosius, lygiašonius ir įvairiakraščius, pažeistume 2 ir 3 taisykles.

4) Skirstymas turi būti *nenutrūkstamas:* klasė palaipsniui skirstoma į artimiausius ją sudarančius poklasius. Pavyzdžiui:



Skirstymo rūšys:

1) *pagal požymio kitimą;* čia tinka 4 taisyklės pavyzdys;

2) *dichotominis* (gr. *„dichotomia“* – visumos padalijimas į dvi dalis) *skirstymas* – skirstymas pagal požymio buvimą ar nebuvimą. Pavyzdžiui, trikampius galima dichotomiškai suskirstyti į stačiuosius ir nestačiuosius. Toliau, taikant 4 skirstymo taisyklę, gausime:

TRIKAMPIAI

statieji nestatieji

bukieji smailieji,

t. y. iš dichotominio skirstymo, kuris iš esmės nėra baigtinis, galima pereiti prie skirstymo pagal požymio kitimą.

Klasifikacija (lot. *„classis"* – grupė, *„facio"* – darau) yra toks skirstymas, kuriame objektai skirstomi į klases taip, kad po skirstymo kiekviena klasė kitų klasių atžvilgiu užimtų pastovią apibrėžtą vietą. Klasifikacijai tinka visos skirstymo taisyklės. Klasifikacijos rūšys:

1) *natūralioji* – objektų suskirstymas į klases, remiantis jų esminiais požymiais; čia geri pavyzdžiai: trikampių klasifikacija pagal jų kampų didumą arba pagal jų kraštinių ilgius; natūraliųjų skaičių klasifikacija pagal jų dalijimąsi iš 2 ir t. t.

2) *pagalbinė* – kai remiamasi neesminiais objektų požymiais. Pastaroji klasifikacija taikoma, norint lengviausiai surasti objektus tarp kitų objektų. Pvz.: mokinių sąrašas klasės žurnale; bibliotekų knygų katalogai; knygų ir straipsnių sąrašai mokslo darbų pabaigoje ir t. t.

2.5. Sąvokos turinį atskleidžiantys loginiai veiksmai

Sąvokos turinį atskleidžia veiksmas, vadinamas apibrėžimu, arba definicija (lot. *„definitio"* – apibrėžimas). *Apibrėžimas* yra loginis veiksmas, taip atskleidžiąs esminius objekto požymius, kad apibrėžiamasis objektas atskiriamas nuo kitų objektų. *Apibrėžimas* leidžia atskleisti objekto specifiką, nustatyti jau vartojamos ar naujos įvedamos sąvokos reikšmę. Apibrėžimą sudaro:

1) *apibrėžiamoji išraiška* (lot. *„definiendum"* – sutrumpintai *Dfd*) – tai sąvoka, kuri apibrėžiama;

2) *apibrėžiančioji išraiška* (lot. *„definiens"* – sutr. *Dfn*);

3) *jungiančioji išraiška* – ji nustato ryšį tarp Dfd ir Dfn, reiškiama žodžiais „yra", „reiškia", „vadinama" ir kt., dažnai vietoje jos dedamas brūkšnys. Pvz.: „Lygiagretainis (*Dfd*) – keturkampis, kurio priešingosios kraštinės lygiagrečios (*Dfn*)". Beje, šį apibrėžimą galima suformuluoti ir taip: „Keturkampį, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios (*Dfn*), vadiname stačiakampiu (*Dfd*)".

Apibrėžiant sąvokas, reikia laikytis trijų taisyklių:

1) *Proporcingumo* (lot. *„proportio"* – santykiavimas) *taisyklė*; apibrėžiamosios išraiškos apimtis turi būti lygi apibrėžiančiosios išraiškos apimčiai, t.y. *Dfd=Dfn*. Pažeidus šią taisyklę, galimos dvi klaidos:

a) *per siauras apibrėžimas*, kai *Dfd* > *Dfn*; pvz.: „Lygiagretainis – tai rombas";

b) *per platus apibrėžimas*, kai *Dfd* < *Dfn*. Pvz.: „Sudėtis – tai aritmetinis veiksmas“; Oilerio ir Veno diagramomis šie atvejai vaizduojami taip:

8 pav.

2) Apibrėžime *neturi būti ydingojo rato* (lot. *„circulus vitiosus“*). *Ydingasis ratas* yra tada, kai:

a) *tas pats objektas apibrėžiamas juo pačiu* (lot. *„idem per idem“*); pvz.: „Statusis kampas – kampas, kurio kraštinės tarpusavyje statmenos“;

b) *objektas apibrėžiamas sąvoka, kuri tampa aiški tik pati apibrėžta.* Pvz.: „Dalyba yra veiksmas, kuriuo vienas skaičius padalijamas iš kito“. Toks reiškinys vadinamas *tautologija* (gr. *„tauto“* – tas pats, *„logos“* – žodis), t. y. sąvoka aiškinama remiantis ta pačia sąvoka, išreikšta kitais žodžiais.

3) Apibrėžimas turi būti *griežtas, aiškus ir tikslus*. Tai reiškia, kad apibrėžimas turi atskleisti objekto specifiką, apibrėžiančiojoje išraiškoje neturi būti neapibrėžtų sąvokų, apibrėžime neleistini vaizdingi palyginimai, metaforiški posakiai ir kt.

Visi apibrėžimai skirstomi į *nominaliuosius* (lot. *„nominalis“* – vardinis) ir *realiuosius* (lot. *„realis“* – tikras). *Nominalusis apibrėžimas* nustato vartojamos arba įvedamos kalbos išraiškos reikšmę. Galima jo struktūra: „Terminu „...“ žymime ...“, „žodis „...“ reiškia ...“, „ženklas „...“ žymi ...“ ir pan. Pvz.: „Ženklas *:* matematikoje žymi dalybą“. *Realusis apibrėžimas* atskleidžia apibrėžiamojo objekto esminius požymius. Daugumą nominaliųjų apibrėžimų galima pertvarkyti į realiuosius.

Mokslinėje ir praktinėje veikloje išskiriama daugiau realiųjų apibrėžimų rūšių. Labiausiai yra paplitę *apibrėžimai gimine ir rūšiniu skirtumu*. Toks pavadinimas atėjo iš senovės laikų, kai logikai klases (aibes) vadino giminėmis, o poklasius (poaibius) – rūšimis. Taigi dabar tokius apibrėžimus reikia suprasti kaip apibrėžimus klase ir skirtumu tarp poklasių. Pvz.: aukščiau išanalizuotas lygiagretainio apibrėžimas yra apibrėžimas gimine ir rūšiniu skirtumu. Giminė čia – „keturkampis“, rūšinis skirtumas – „kurio priešingosios kraštinės lygiagrečios“. Kai dar nėra suformuluoto apibrėžimo gimine ir rūšiniu skirtumu (arba kai to padaryti negalima dėl besimokančiųjų amžiaus ypatybių ar nepakankamo išsilavinimo lygio), naudojami *genetiniai* (gr. *„genesis“* – kilmė, atsiradimas) *apibrėžimai*, kuriuose objekto specifika nustatoma, nurodant, kaip objektas atsiranda arba yra sukuriamas. Pvz.: „Statusis skritulinis ritinys – geometrinis kūnas, kuris gaunamas sukant stačiakampį 360° kampu apie vieną iš jo kraštinių". Formalizuotose mokslo teorijose taikomas *indukcinis* (lot. *,,inductio"* – įvedimas) *apibrėžimas*, kaip genetinio apibrėžimo atmaina. Jis leidžia iš kai kurių pradinių teorijos objektų, pritaikius tam tikras taisykles, sudaryti naujus teorijos objektus. Pvz.: parabolė gali būti apibrėžiama formule $y=x^2$, aritmetinės progresijos bendrasis narys – formule

$a_n=a_1+(n-1)d$.

Individualius objektus patogu apibrėžti *deskripciniu (aprašomuoju)* apibrėžimu, pavartojant *jota operatorių*, kuris reiškiamas „tas (tai) x". Pvz.: A(-2; 4). Tai konkretaus taško A apibrėžimas. Tais atvejais, kai sąvoką apibrėžti žodžiais sunku (pvz., pradinėje mokykloje) ar nebūtina (pvz., mokantis svetimų kalbų), naudojamas *ostensinis* (lot. *,,ostendere"* – parodyti) apibrėžimas – žodžio reikšmės nustatymas, tiesiogiai nurodant objektą, kurį tas žodis žymi. Pvz.: pradinėje mokykloje naudojami tokie ostensiniai apibrėžimai: „4+2=6, 8=3+5 – tai lygybės. 4<5, 3+1>2 – tai nelygybės". Norėdami atskirti vieną objektą nuo kito, dažnai neieškome tam objektui būdingų skiriamųjų savybių, bet nustatome esminius apibrėžiamojo ir kitų objektų santykius. Dėl to kasdieniniame gyvenime ir moksle labai dažnai naudojami *nepilnieji apibrėžimai.*

Kai sudėtingo objekto specifiką sunku atskleisti apibrėžimu, naudojami kiti būdai: *aprašymas, charakteristika* (gr. *,,charaktēristikos"* – skiriamasis)*, paaiškinimas pavyzdžiais, objekto struktūros analizė* ir kt.

3. SPRENDINYS

3.1. Sprendinio sąvoka. Sprendinių rūšys

Sprendiniu vadinama mintis, kuri ką nors apie objektus teigia arba neigia. Sprendiniai gali būti teisingi arba klaidingi. Teisingumas ir klaidingumas vadinami *sprendinio reikšmėmis*. Pvz.: ,,Skaičius 6 yra lyginis" – teisingas sprendinys, ,,Skaičius 8 yra nelyginis" – klaidingas sprendinys, 8>3 – teisingas sprendinys.

Sprendiniai reiškiami sakiniais: ne mažiau kaip dviem tam tikru būdu sujungtomis sąvokomis, reiškiančiomis baigtinę mintį. Tarp sprendinio ir gramatinio sakinio nėra visiškos atitikties – ne visi sakiniai gali būti laikomi sprendiniais, nes ne visi jie ką nors teigia ar neigia. Klausiamieji ir šaukiamieji sakiniai nelaikomi sprendiniais.

Sprendinyje yra išreikštas santykis tarp dviejų sąvokų. Sakinio, kuriuo išreikštas sprendinys, veiksnys vadinamas *subjektu* (S) (lot. *,,subjectum"* – loginis veiksmo atlikėjas), subjekto savybė – *predikatu* (P) (lot. *,,praedicatum"* – kas pasakyta). Abi šias sprendinio dalis jungia *jungtis*, kuri reiškiama žodžiais ,,yra", ,,nėra". Žodį ,,yra" dažnai keičia brūkšnys. Kiekybiškai sprendinį apibūdina *kvantorius* (lot. *,,quantum"* – kiek). Jis nurodo, kokiam objektų skaičiui požymis priskiriamas arba nepriskiriamas.

Kalboje dažniausiai vartojami šie kvantoriniai žodžiai: visi, kiekvienas, bet kuris, nė vienas, kai kurie, keli, keliolika, vienintelis, yra, egzistuoja, daug ir kt. Kvantoriams priklauso visi kiekiniai skaitvardžiai. Logikoje visi jie išreiškiami egzistavimo (lot. *„existentia“* – buvimas) kvantoriumi ($\exists$x) ir *bendrumo* kvantoriumi ($\forall$x). Egzistavimo kvantorius nenurodo konkretaus objektų, turinčių tą požymį, skaičiaus. Jis tvirtina, kad požymį turi *bent vienas* arba *kai kurie* tos klasės objektai, t. y. kad *egzistuoja* objektai, turį šį požymį. Bendrumo kvantorius tvirtina, kad požymis yra būdingas *kiekvienam* nagrinėjamos klasės objektui.

Sprendiniai pagal sąvokų jungties pobūdį skirstomi į dvi klases. *Atributyviu (savybių)* (lot. *„attributum“* – savybė) vadinamas sprendinys, kuris leidžia konstatuoti, kad koks nors objektas turi tam tikrą savybę arba jos neturi. Tokio sprendinio struktūros simbolinė išraiška gali būti: S – P, S – $\overline{\text{P}}$ ir pan. Aukščiau pateikti pirmieji du sprendiniai apie skaičius 6 ir 8 – atributyvūs (savybių) sprendiniai. *Reliaciniu (santykio)* (lot. *„relatio“* – santykis) sprendiniu vadinamas sprendinys, kuriame išreikštas santykis tarp dviejų arba daugiau objektų. Kalboje santykiai reiškiami įvairiais žodžiais: daugiau, lygu, skirtingas, brolis, tėvas, pažįstamas, draugas, dovanoti, sukurti, matyti, mylėti, ginti, priežastingumas, judėjimas, mainai ir kt., matematikoje – ženklais: „=“, „>“, „<“, „≥“, „≤“. Santykio sprendinio simbolinė išraiška yra xRy. Santykio sprendinius galima pakeisti savybių sprendiniais.

Atributyvūs (savybių) sprendiniai skirstomi keliais pagrindais. Jei skirstymo pagrindu imsime *kokybę*, gausime dvi sprendinių klases.

1) *Teigiamieji* sprendiniai. Juose nurodoma, kad subjektas turi kokią nors savybę (predikatą). Struktūra: S – P. Pavyzdžiui: „Skaičius 11 yra pirminis“.

2) *Neigiamieji* sprendiniai. Juose nurodoma, kad subjektas neturi kokios nors savybės. Struktūra: S – $\overline{\text{P}}$. Pavyzdžiui: „Skaičius 9 nėra neigiamas“.

Pagal *kiekybę* atributyvūs sprendiniai suskirstomi į tris klases.

1) *Vieniniai* sprendiniai – tokie, kuriuose predikatas priskiriamas arba nepriskiriamas vienam subjektui. Struktūra: S – P, S – $\overline{\text{P}}$. Pavyzdžiui: „Skaičius -2 – neigiamasis“; „Skaičius 1 nėra nei pirminis, nei sudėtinis“.

2) *Daliniai* sprendiniai – tokie, kuriuose predikatas priskiriamas arba nepriskiriamas kai kuriems subjektams. Struktūra: $\exists$S – P, $\exists$S – $\overline{\text{P}}$. Pavyzdžiui: „Kai kurie kampai yra smailieji“; „Yra skaičių, kurie nesidalija iš 3“.

3) *Bendrieji* sprendiniai – tokie, kuriuose predikatas priskiriamas arba nepriskiriamas kuriam nors subjektui. Struktūra: $\forall$S – P, $\forall$S – $\overline{\text{P}}$. Pavyzdžiui: „Visi lyginiai skaičiai dalijasi iš 2“; „Visi nelyginiai skaičiai nesidalija iš 2“.

Sujungus sprendinių skirstymą pagal kiekybę ir kokybę, gaunamos keturios jų rūšys.

1) *Bendrieji teigiamieji* sprendiniai. Jų struktūra: $\forall$S – P. Žymėjimas: *a* (lot. *„affirmo“* – teigiu I balsė). Tai pirmasis pavyzdys, pateiktas po bendrųjų sprendinių.

2) *Bendri neigiamieji* sprendiniai. Jų struktūra: $\forall S - \overline{P}$. Žymėjimas: *e* (lot. *„nego"* – neigiu I balsė). Tai – antrasis pavyzdys, pateiktas po bendrųjų sprendinių.

3) *Daliniai teigiamieji* sprendiniai. Jų struktūra: $\exists S - P$. Žymėjimas: *i* (žodžio *„affirmo"* II balsė). Pvz., „Kai kurie trikampiai yra lygiašoniai".

4) *Daliniai neigiamieji* sprendiniai. Jų struktūra: $\exists S - \overline{P}$. Žymėjimas: *o* (žodžio *„nego"* II balsė). Pvz., „Dalis skaičių nesidalija iš 5".

Vieniniai teigiamieji ir neigiamieji sprendiniai priskiriami atitinkamiems bendriesiems sprendiniams.

Subjektas ir predikatas vadinami *sprendinio terminais* (lot. *„terminus"* – riba, siena). Terminų *suskirstymas* sprendiniuose – žinojimas, koks yra subjekto ir predikato santykis sprendiniuose apimties požiūriu. Terminas vadinamas *suskirstytu,* jei jo apimtis visiškai įskiriama į kito termino apimtį (subordinacija) arba visiškai iš jos išskiriama (nuošalė). Terminas vadinamas *nesuskirstytu,* jei jo apimtis tik iš dalies įskiriama į kito termino apimtį arba iš dalies išskiriama iš jos (sankirta). Terminų suskirstymą sprendiniuose schemiškai galima išreikšti lentele:

2 lentelė

Sprendinio rūšis / Terminai	a	e	i	o
S	+	+	–	–
P	–	+	–	+

Terminų suskirstymo variantai yra šie:

1) *Subjektas yra suskirstytas bendruosiuose sprendiniuose (a, e)*. Pavyzdžiai: 1) Sprendinyje „Lygiagretainiai (S) yra keturkampiai (P)" turime $S \subset P$ (subordinacijos santykis); 2) Sprendinyje „Trikampiai (S) nėra keturkampiai (P)" turime $S \cap P = \varnothing$ (nuošalės santykis).

2) *Subjektas nesuskirstytas daliniuose sprendiniuose (i, o)*. Pavyzdžiui: 1) Sprendinyje „Kai kurie penkiakampiai (S) yra taisyklingi (P)" turime $S \cap P$ (perkirtimo santykis) ir tik dalis klasės „penkiakampiai" įskiriama į klasę „taisyklingos figūros"; 2) Sprendinyje „Kai kurie natūralieji skaičiai (S) nesidalija iš 3 (P)" turime $P \subset S$ (subordinacijos santykį), t. y. tik dalis klasės „natūralieji skaičiai" išskiriama iš klasės „skaičiai, kurie dalijasi iš 3".

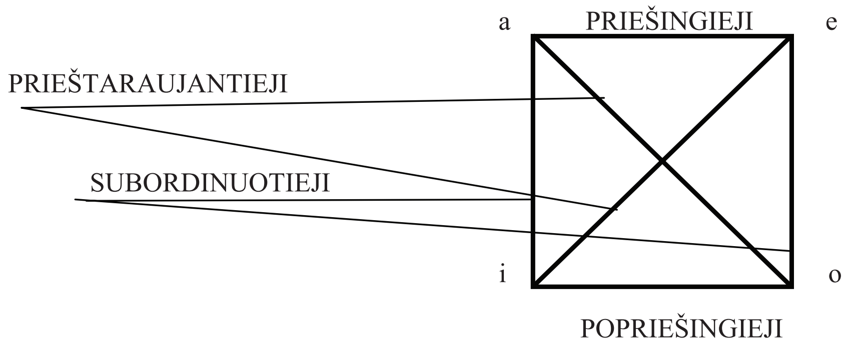
3) *Predikatas suskirstytas neigiamuosiuose sprendiniuose (e, o)*. Pavyzdys: Sprendinyje „Trikampiai (S) nėra keturkampiai (P)" (žr. 1 variantą) tarp S ir P yra nuošalės santykis. Jei nė vienas klasės „trikampiai" (S) elementas nėra įskiriamas į klasę „ketur-

kampiai“ (P), tai tuo labiau dalis klasės S elementų negali būti įskirta į klasę P. Todėl ir daliniuose neigiamuosiuose sprendiniuose predikatas P yra suskirstytas.

4) *Predikatas nesuskirstytas teigiamuosiuose sprendiniuose (a, i)*. Pavyzdžiai: 1) Sprendinyje „Visi trikampiai (S) yra geometrinės figūros (P)“ turime S⊂P (subordinacijos santykis) ir tik dalis klasės „geometrinės figūros“ P elementų įskiriama į klasę „trikampiai“ (S); 2) Sprendinyje „Kai kurie trikampiai (S) yra taisyklingi (P)“ tik dalis klasės „taisyklingos figūros“ (P) elementų įskiriama į klasę „trikampiai“ (S), tarp šių klasių yra perkirtimo santykis: P⊂S.

3.2. Loginis kvadratas

Santykius tarp sprendinių a, e, i, o padeda nustatyti loginis kvadratas. Jo schema:



9 pav.

Prieštaravimo santykis yra tarp sprendinių *a* ir *o*, *e* ir *i.* Jei vienas prieštaraujančiųjų sprendinių yra teisingas, tai kitas – klaidingas, ir, priešingai, jei vienas jų klaidingas, tai kitas – teisingas. Tegul turime teisingą sprendinį: „Visi lyginiai skaičiai dalijasi iš 2“ (*a*), tada jam priešingas sprendinys bus klaidingas: „Kai kurie pirminiai skaičiai nesidalija iš 2“ (*o*). Jei sprendinys „Kai kurie trikampiai turi 4 kampus“ (*i*) yra klaidingas, tai jam priešingas sprendinys bus teisingas: „Nė vienas trikampis neturi 4 kampų“ (*e*). *Priešingumo santykis* yra tarp sprendinių *a* ir *e*. Priešingi sprendiniai negali būti kartu teisingi: jei vienas priešingų sprendinių yra teisingas, tai kitas – klaidingas, o jei vienas jų klaidingas, tai kitas yra neapibrėžtas (gali būti teisingas arba klaidingas, priklausomai nuo objektų, apie kuriuos kalbama sprendinyje). Sprendinys „Visi lygiagretainiai yra keturkampiai“ (*a*) – teisingas, tada priešingas sprendinys „Visi lygiagretainiai nėra keturkampiai“ (*e*) – klaidingas. Sprendinys „Visi kvadratai – netaisyklingos figūros“ (*e*) klaidingas, jam priešingas sprendinys a bus teisingas. Sprendinys „Visi natūralieji skaičiai nesidalija iš 2“ (*e*) – klaidingas, priešingas sprendinys *a* taip pat klaidingas.

Subordinacijos santykis yra tarp sprendinių *a* ir *i*, *e* ir *o*. Jei sprendiniai *a* ir *e* yra teisingi, tai subordinuotieji sprendiniai *i* ir *o* taip pat teisingi, nes jei savybę turi (neturi) visi tam tikros klasės objektai, tai tą savybę turi (neturi) ir kai kurie tos klasės objektai. Jei sprendinys „Visų trikampių vidaus kampų suma lygi 180°“ (*a*) yra teisingas, tai tuo labiau bus teisingas sprendinys *i*: „Kai kurių trikampių vidaus kampų suma lygi 180°“. Jei sprendiniai *a* ir *e* klaidingi, tai subordinuotieji sprendiniai *i* ir *o* neapibrėžti (gali būti teisingi arba klaidingi ir priklauso nuo objektų, apie kuriuos tuose sprendiniuose kalbama). Jei sprendinys „Visi natūralieji skaičiai nesidalija iš 3“ (*e*) – klaidingas, tai sprendinys „Kai kurie natūralieji skaičiai nesidalija iš 3“ (*o*) – teisingas. Jei sprendiniai *i* ir *o* teisingi, tai subordinuotieji sprendiniai *a* ir *e* yra neapibrėžti, nes jei savybę turi (neturi) kai kurie klasės objektai, tai neaišku, ar tą savybę turi (neturi) visi tos klasės objektai. Jei sprendinys „Kai kurie skaičiai yra lyginiai“ (*i*) – teisingas, tai sprendinys „Visi skaičiai yra lyginiai“ (*a*) bus klaidingas. Tačiau jei sprendinys „Kai kurių keturkampių vidaus kampų suma lygi 360°“ (*i*) yra teisingas, tai bendrasis sprendinys a taip pat bus teisingas. Jei sprendiniai *i* ir *o* klaidingi, tai subordinuotieji sprendiniai *a* ir *e* taip pat klaidingi. Sprendinys „Kai kurių skritulių spinduliai nėra tarpusavyje lygūs“ (*o*) yra klaidingas. Klaidingas bus ir sprendinys „Visų skritulių spinduliai nėra tarpusavyje lygūs“ (*e*). *Politiešingumo santykis* yra tarp sprendinių *i* ir *o*. Jei vienas iš šių sprendinių yra teisingas, tai antrasis – neapibrėžtas. Sprendinys „Kai kurie skaičiai yra pirminiai“ (*i*) yra teisingas, sprendinys „Kai kurie skaičiai nėra pirminiai“ (*o*) taip pat teisingas. Sprendinys „Kai kurie skaičiai turi modulį“ (*i*) teisingas, o sprendinys „Kai kurie skaičiai neturi modulio“ (*o*) – klaidingas. Jei vienas iš šių sprendinių *i* ir *o* yra klaidingas, tai antrasis yra teisingas. Sprendinys „Kai kurios atkarpos neturi ilgio“ (*o*) yra klaidingas. Tada sprendinys „Kai kurios atkarpos turi ilgį“ (*i*) – teisingas. Šiuos sprendinių santykius galima pavaizduoti lentele:

3 lentelė

		a	e	i	o
a	t	–	k	t	k
a	k	–	n	n	t
e	t	k	–	k	t
e	k	n	–	t	n
i	t	n	k	–	n
i	k	k	t	–	t
o	t	k	n	n	–
o	k	t	k	t	–

Pastaba: *t* – teisingas, *k* – klaidingas, *n* – neapibrėžtas.

Lentelė leidžia gauti iš bet kurio sprendinio likusius 3 sprendinius ir įvertinti juos teisingumo požiūriu. Pvz.:

<u>Kai kurios trupmenos yra mažesnės už 1 (*i, t*)</u>
Visos trupmenos yra mažesnės už 1 (*a, n – k*)
Visos trupmenos nėra mažesnės už 1 (*e, k*)
Kai kurios trupmenos nėra mažesnės už 1 (*o, n – t*).

Tais atvejais kai lentelėje nėra neapibrėžtumų, viskas yra dar paprasčiau:

<u>Kai kurie skrituliai nėra apvalūs (*o, k*)</u>
Visi skrituliai yra apvalūs (*a, t*)
Visi skrituliai nėra apvalūs (*e, k*)
Kai kurie skrituliai yra apvalūs (*i, t*).

4. TEIGINYS

4.1. Teiginio sąvoka

Teiginiu vadinamas bet kuris sakinys, kuris teisingas arba klaidingas. Iš gramatinių sakinių teiginiais laikomi tiesioginiai sakiniai. Teiginių logikoje teiginys nedalomas į sudėtines dalis, jis nagrinėjamas kaip vieninga nedaloma visuma.

Teiginiai gali būti paprasti (jau mūsų išnagrinėti sprendiniai), kurie į jokius kitus teiginius neskaidomi, ir sudėtiniai.

4.2. Sudėtinis teiginys

4.2.1. Sudėtinio teiginio apibrėžimas

Sudėtiniu teiginiu vadinamas teiginys, sudarytas iš kelių paprastų teiginių, sujungtų loginėmis jungtimis. Kalboje sudėtiniai teiginiai reiškiami sudėtiniais ir išplėstiniais vientisiniais sakiniais. Šnekamojoje kalboje naudojami įvairūs jungiamieji žodžiai, įgalinantys susieti pradinius teiginius į vieną sudėtinį teiginį. Logikoje vartojamos keturios jungtys: *ir, arba, jei ..., tai, jei ir tik jei..., tai.* Nuo to, kokia logine jungtimi sujungti paprasti teiginiai, priklauso sudėtinio teiginio rūšis.

4.2.2. Konjunkcinis teiginys

Konjunkciniu (lot. *„conjunctio“* – sujungimas, ryšys) *teiginiu* vadinamas sudėtinis teiginys, sudarytas iš kelių paprastų teiginių, sujungtų logine jungtimi „ir“. Jo paprasčiausia išraiška: $p \wedge q$, čia p ir q – paprasti teiginiai, simbolis – loginė jungtis

„ir“. Konjunkcijos narius galima sukeisti vietomis, nuo to sudėtinio teiginio reikšmė nesikeičia. Jo teisingumas priklauso nuo jį sudarančių paprastų teiginių teisingumo reikšmių. Teisingumo reikšmėms nustatyti paprastai sudaroma teisingumo lentelė (teisingumo matrica).

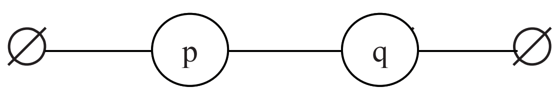
Konjunkcijos matrica:

4 lentelė

p	q	p∧q
t	t	t
t	k	k
k	t	k
k	k	k

Raidės *t* ir *k* – žodžių „teisingas“ ir „klaidingas“ santrumpos.

Konjunkcijos taisyklė*: konjunkcija teisinga tik tada, kai teisingi visi jos nariai.* Pailiustruosime tai tokiu teiginiu: „Šis skaičius yra sveikasis (*p*) ir teigiamasis (*q*)“. Tegu tai bus skaičius 17. Tada tiks pirmoji matricos eilutė ir teiginys bus teisingas. Imant skaičius -9, 2½, -0,8 turėsime kitų matricos eilučių atitikmenis ir konjunkcinis teiginys bus klaidingas. Beje, jei *p* ir *q* – elektros lemputės, tai konjunkcija – nuosekliai sujungtų elektros lempučių grandinė:



10 pav.

Konjunkcinį teiginį gali sudaryti ne tik du, bet ir daugiau paprastų teiginių.

Šnekamojoje kalboje konjunkcija gali būti reiškiama žodžiais: *ir, o, bet, tačiau, nei ..., nei* ir kt.

4.2.3. Disjunkcinis teiginys

Disjunkcinis (lot. *„disjunctio“* – atskyrimas) *teiginys* – sudėtinis teiginys, sudarytas iš kelių paprastų teiginių, sujungtų logine jungtimi „arba“. Jo paprasčiausia išraiška: $p \vee q$, čia *p* ir *q* – paprastieji teiginiai, simbolis – loginė jungtis „arba“. Disjunkcija gali būti griežtoji ir silpnoji. *Griežtojoje disjunkcijoje* iš kelių galimų atvejų įvykdomu laikomas tik vienas. Jos matrica:

5 lentelė

p	q	p ∨ q
t	t	k
t	k	t
k	t	t
k	k	k

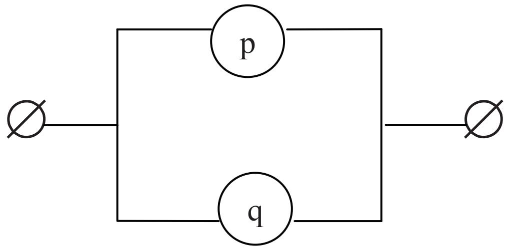
Griežtosios disjunkcijos taisyklė: *griežtoji disjunkcija teisinga tik tada, kai teisingas tik vienas jos narys.* Pavyzdžiui, teiginys „Šis skaičius yra teigiamasis (*p*) arba neigiamasis (*q*)“ bus teisingas, esant teisingai jo daliai *p* arba daliai *q*, bet bus klaidingas, jei abi jo dalys būtų teisingos (tai tikrovėje neįmanoma) arba klaidingos (tai būtų p=q=0).

Silpnojoje disjunkcijoje iš kelių galimų atvejų įvykdomu laikomas bent vienas, tačiau numatoma, kad gali būti įvykdomi ir kiti atvejai. Jos matrica:

6 lentelė

p	q	p ∨ q
t	t	t
t	k	t
k	t	t
k	k	k

Silpnosios disjunkcijos taisyklė*: silpnoji disjunkcija klaidinga tik tada, kai klaidingi visi jos nariai.* Silpnoji disjunkcija, nors tai gal ir atrodo keistokai, kaip tik labiau yra pritaikoma griežtuosiuose moksluose: fizikoje ir matematikoje. Iš tiesų, pažymėjus *p* ir *q* raidėmis elektros lemputes ir įjungus jas į tinklą lygiagrečiai, turėsime elektros grandinę:



11 pav.

Grandinėje srovė bus tais atvejais, kurie atitinka teiginio reikšmę *t* (lemputė tvarkinga – neperdegusi, įsukta).

O matematikoje silpnąja disjunkcija remiamasi, sprendžiant kai kurias lygtis, kai po pertvarkių gaunama, pvz.:

$$(x+a)(x+b)=0.$$

Tada laikoma, kad $x_1 = -a$, $x_2 = -b$.

Šnekamojoje kalboje disjunkcija gali būti reiškiama žodžiais: *arba, gal ..., gal, ar ..., ar* ir kt.

4.2.4. Implikacinis teiginys

Implikaciniu (lot. „*implicatio*“ – sąsaja) *teiginiu* vadinamas sudėtinis teiginys, sudarytas iš dviejų paprastų teiginių, sujungtų logine jungtimi „*jei ..., tai*“. Jo simbolinė išraiška: $p \to q$. Pirmasis implikacijos teiginys *p* vadinamas *antecedentu* (lot. „*antecedens*“ – pirmiau einantis, pirmesnis), o antrasis *q* – *konksekventu* (lot. „*consequentia*“ – pasekmė). Jo prasmė: iš antecedento seka konsekventas.

Bendriausia implikacijos rūšis – *materialioji* (lot. „*materialis*“ – daiktinis) implikacija, kurioje atsižvelgiama tik į sudėtinių teiginių teisingumą ir klaidingumą (tarp paprastųjų teiginių, sudarančių implikaciją, gali nebūti prasminio ryšio). Jos matrica:

7 lentelė

p	q	p→q
t	t	t
t	k	k
k	t	t
k	k	t

Implikacijos taisyklė*: implikacija klaidinga tik tada, kai iš teisingo antecedento išplaukia klaidingas konsekventas.* Pateiksime pavyzdžius, atitinkančius kiekvieną matricos eilutę:

1) Jei skaičius dalijasi iš 9 (*p*), tai jis dalijasi ir iš 3 (*q*) (čia tarp paprastųjų teiginių yra ir prasminis ryšys). Jei 2·2=4 (*p*), tai šuo turi 4 kojas (*q*) (prasminio ryšio tarp paprastųjų teiginių nėra). Teiginiai teisingi.

2) Jei -3<-1 (*p*), tai 3^2=6 (*q*) (prasminio ryšio nėra, pagal II matricos eilutę ir implikacijos taisyklę teiginys klaidingas).

3) Jei *lg*100=10 (*p*), tai 3^2=9 (*q*) (prasminio ryšio nėra, pagal III matricos eilutę teiginys $p \to q$ teisingas).

4) Jei 2·2=5 (*p*), tai 1+1=3 (*q*) (prasminio ryšio nėra, pagal IV matricos eilutę

teiginys $p \rightarrow q$ teisingas).

Šnekamojoje kalboje implikacija gali būti išreikšta įvairiais žodžiais*: jei ..., tai, taigi, vadinasi* ir kt.

4.2.5. Loginis ekvivalentumas

Logiškai ekvivalenčiais (lot. *„aequivalens“* – lygiavertis, lygiareikšmis) *(lygiaverčiais)* vadinami du teiginiai, sujungti logine jungtimi „jei ir tik jei ..., tai“. Simbolinė išraiška: $p \sim q$. Loginio ekvivalentumo matrica:

8 lentelė

p	q	p~q
t	t	t
t	k	k
k	t	k
k	k	t

Loginio ekvivalentumo taisyklė: *du teiginiai yra logiškai lygiaverčiai, jei jų teisingumo reikšmės vienodos (jie abu yra teisingi arba klaidingi).* Pvz., teiginiai „Jei ir tik jei keturkampis yra lygiagretainis (*p*), tai jo įstrižainės susikirtimo taške dalijasi pusiau (*q*)“ (atitinka I matricos eilutę) ir „Jei ir tik jei $2^3= 6$ (*p*), tai $2+2=5$ (*q*)“ (atitinka IV matricos eilutę) bus teisingi. Teiginiai „Jei ir tik jei keturkampis yra rombas (*p*), tai jo priešingieji kampai nelygūs (*q*)“ (atitinka II matricos eilutę) ir „Jei ir tik jei $2^3=6$ (*p*), tai $2^2=4$ (*q*)“ (atitinka III matricos eilutę) yra klaidingi.

Loginis ekvivalentumas – tai implikacija abiem kryptimis: $(p \sim q) \sim [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$. Iš tiesų, teiginys „Jei ir tik jei keturkampis yra stačiakampis (*p*), tai jo visi kampai lygūs (*q*)“ bus teisingas. Taip bus dėlto, kad bus teisingi implikaciniai teiginiai: „Jei keturkampis yra stačiakampis (*p*), tai jo kampai lygūs (*q*)“ ($p \rightarrow q$ (*t*)) ir „Jei keturkampio kampai lygūs (*q*), tai jis yra stačiakampis (*p*)“ ($q \rightarrow p$ (*t*)).

Šnekamojoje kalboje loginis ekvivalentumas gali būti reiškiamas įvairiais žodžiais: *tik tada, tada ir tik tada, tik tuo atveju* ir kt. Lietuvių kalboje loginė jungtis *jei ir tik jei..., tai...* atrodo gana nenatūrali ir šnekoje jos niekas nevartoja.

4.3. Teiginių neigimas

Neigti galima ne tiktai sąvokas, bet ir paprastus bei sudėtinius teiginius. Loginis neigimas reiškiamas žodžiais: *ne, nėra, netiesa, kad ..., klaidinga, kad ...* ir kt. Loginio neigimo matrica:

9 lentelė

p	$\overline{p}$
t	k
k	t

Pvz., „Skaičius 24 yra lyginis" (p, t), tada „Skaičius 24 yra nelyginis" ($\overline{p}$, k).

Dvigubas neigimas lygiavertis teigimui: $\rceil\rceil p \sim p$. Pvz.:

„Skaičius 27 dalijasi iš 3" (p, t);

„Skaičius 27 nesidalija iš 3" ($\overline{p}$, k);

„Netiesa, kad skaičius 27 nesidalija iš 3" ($\rceil\rceil p$, t).

Sudėtinio teiginio neigimas panašus į paprastų teiginių neigimą. Konjunkcijos neigimo simbolinė išraiška:

$\overline{p \wedge q}$, disjunkcijos: $\overline{p \vee q}$, implikacijos: $\overline{p \rightarrow q}$, ekvivalentumo: $\overline{p \sim q}$.

4.4. Teiginių formalizavimas ir išsprendžiamumo problema

Bet kurį teiginį galima užrašyti simbolių kalba, t.y. *formalizuoti* (vok. *„formalisieren"*). Žinant paprastųjų teiginių teisingumo reikšmes ir taikant konjunkcijos, disjunkcijos, implikacijos, ekvivalentumo bei neigimo taisykles, galima nustatyti sudėtinio teiginio teisingumo reikšmę. Teiginys „Jei keturkampis yra lygiagretainis (p), bet ne rombas (q), tai jo įstrižainės nėra tarpusavyje statmenos (r)" yra teisingas. Jį formalizavus, turėsime:

$(p \wedge \overline{q}) \rightarrow \overline{r}$.

Tarkime, kad visi paprastieji teiginiai yra teisingi. Tada turėsime:

$(t \wedge \overline{t}) \rightarrow \overline{t}$

$(t \wedge k) \rightarrow k$

$k \rightarrow k$

t.

Pagrindinė kiekvienos loginės teorijos problema yra *išsprendžiamumo problema*. Jos esmė: pavartojus tam tikrą loginių veiksmų skaičių, galima nustatyti, ar nagrinėjamoji išraiška yra visuomet teisinga, ar visuomet klaidinga, ar kartais teisinga, kartais – ne. Vienas iš efektyviausių išsprendžiamumo problemos sprendimo būdų – matricų metodo vartojimas.

5. LOGIKOS DĖSNIAI

Mąstymo dėsniai išreiškia esminius ir būtinus ryšius apibrėžimuose, samprotavimuose ir kt. intelektinėse operacijose. *Logikos dėsnis* – terminas, vartojamas bet kuriai teisingo mąstymo normai apibūdinti. Dėsnių kaip teisingo mąstymo normų formulavimą lemia esminių mąstymo savybių – *apibrėžtumo*, *neprieštaringumo*, *nuoseklumo*, *pagrįstumo* – išskyrimas. Pagal šias keturias savybes išskiriami keturi pagrindiniai logikos dėsniai.

Tapatybės dėsnis išreiškia mąstymo apibrėžtumą. Mintis yra *apibrėžta,* kai operuojama aiškaus turinio ir griežtos apimties sąvokomis, taip pat ir teiginiais, vienareikšmiškai išreiškiančiais kokį nors objektą. Tapatybės dėsnis teigia: *kiekviena mintis samprotavimo procese turi būti tapati pačiai sau.* Šis dėsnis draudžia sąvokos arba teiginio prasmės pakeitimą to paties intelektinio veiksmo ribose. Jis skatina patikrinti ir išoriškai vienodų kalbos konstrukcijų, galinčių turėti skirtingą turinį, vartojimą samprotaujant. Nepatikrinus galimos klaidingos išvados.

Prieštaravimo dėsnis išreiškia mąstymo neprieštaringumą. Mąstymas prieštaringas tada, kai teisingais laikysime du teiginius, kurių viename teigiama tai, kas neigiama kitame. Šis dėsnis formuluojamas taip: *teiginys negali būti kartu teisingas ir klaidingas*. Arba: netiesa, kad teiginys ir jo neigimas yra kartu teisingi. Prieštaravimas tekste gali būti išreikštas *aiškiai* arba *neaiškiai.*

Negalimo trečiojo dėsnis paryškina tai, kad teiginys p ir jo neiginys $\bar{p}$ negali būti kartu teisingi ar klaidingi: *kiekvienas teiginys yra arba teisingas, arba klaidingas – trečios galimybės nėra* (lot. *„tertium non datur“*).

Pakankamo pagrindo dėsnis: teiginys laikomas teisingu tada, kai jis yra įrodytas pateikus pakankamą jo teisingumo pagrindą. Pakankamas teisingumo pagrindas – visuma teiginių, iš kurių pagrindžiamasis teiginys išplaukia pagal logikos dėsnius. Šios visumos teiginiai vadinami *argumentais* (lot. *„argumentum“* – įrodymo pagrindas). Jie yra dvejopo pobūdžio: *būtini* argumentai ir *pakankami* argumentai. Jei teiginys pagrindžiamas būtinais ir pakankamais argumentais, jis yra laikomas teisingu. Argumentų teisingumu turime būti tikri, nes kitaip galima gauti nepagrįstus teiginius.

6. TEIGINIŲ MODALUMAS

Logika, kurioje teiginiai, be teisingumo ir klaidingumo reikšmių, įgauna ir kitokias reikšmes (tikėtini, neapibrėžti, galimi ir kt.), vadinama *daugiareikšme*. Viena jos sistemų – modalinė (pranc. *„modal“*, lot. *„modus“* – matas, saikas, nuosaka) logika. *Modalinė logika* tiria *modalumus* – atvirai arba neatvirai teiginiuose išreikštą papildomą informaciją apie priklausomybės tarp realių reiškinių, objektų pobūdį, apie teiginių loginį statusą, apie vertinimo, reguliavimo, būtinumo, galimumo ir kitas jo charakteristikas. Modalumai (modaliniai terminai) yra sąvokos: *galima, būtina, tikėtina, draudžiama, privaloma* ir kt. Modaliniai terminai pagal jų pobūdį skirstomi į grupes.

1) *Aletiniai modalumai* (graik. *„alētēja“* – tiesa). Jie reiškiami sąvokomis: *būtina, galima, negalima, atsitiktina, neatsitiktina* ir kt. Pvz.: „Negalima dalyti iš nulio“.

2) *Deontiniai* arba *norminiai modalumai* (graik. *„deon“* – priedermė). Jie reiškiami sąvokomis: *privaloma, draudžiama, leidžiama, indiferentiška* ir kt. Pvz.: „Privaloma tvarkingai užrašyti uždavinio sprendimą“.

3) *Aksiologiniai* arba *vertinimo modalumai* (graik. *„axios“* – vertingas). Jie reiškiami sąvokomis: *geras, blogas, prastas, ne koks* ir kt. Pvz.: „Jo sprendimas – geras“.

4) *Episteminiai modalumai* (graik. *„epistēmē“* – žinios). Jie reiškiami sąvokomis: *įrodoma, paneigiama, problemiška* ir kt. Pvz.: „Įrodoma, kad trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas yra vienodai nutolęs nuo visų jo kraštinių“.

Santykis tarp loginių ir fizinių modalumų gali būti išreikštas taip.

1) Kiekvienas teiginys, kuris išreiškia ryšius, galimus fizine prasme, galimas taip pat ir logiškai, tačiau priešingas teiginys ne visuomet teisingas. Fizinės galimybės teisingumo sąlygos nustatomos patyrimu, loginių teisingumo taisyklių ji neturi. Jei teiginys negalimas logiškai, tai jis negali išreikšti ir objekto egzistavimo ar proceso tėkmės būdo, nes prieštaringas būvis negali būti fiziškai realizuotas.

2) Kiekvienas teiginys, kuriame išreikštas loginis būtinumas, būtinas ir fizine prasme, tačiau priešingas teiginys ne visada teisingas.

Modalumai žymimi: būtinumas – N (pirmoji žodžio *„necessity“* (angl.), *„Notwendigkeit“* (vok.) – būtinumas raidė), nebūtinumas – $\overline{N}$, galimybė – M (pirmoji vok. žodžio *„Möglichkeit“* – galimybė raidė), negalimybė – $\overline{M}$, atsitiktinumas – C (pirmoji angl. žodžio *„contingency“* – atsitiktinumas raidė), neatsitiktinumas – $\overline{C}$. Vienus modalumus galima pakeisti kitais, jiems lygiaverčiais modalumais, naudojantis lentele:

10 lentelė

Modalumai		Būtina	Galima
Būtina		$N\ p$	$\overline{M}\ \overline{p}$
Nebūtina		$\overline{N}\ p$	$M\ \overline{p}$
Galima		$\overline{N}\ \overline{p}$	$M\ p$
Negalima		$N\ \overline{p}$	$\overline{M}\ p$
Atsitiktina	$C\ p$	$\overline{N}\ \overline{p} \wedge \overline{N}\ p$	$M\ \overline{p} \wedge \overline{M}\ \overline{p}$
Neatsitiktina	$\overline{C}\ p$	$N\ p \vee N\ \overline{p}$	$\overline{M}\ \overline{p} \vee \overline{M}\ p$

Pateikiame modalumų keitimo pavyzdžius, atitinkančius kiekvieną lentelės eilutę:

1) *Būtina* keisti lygties bet kurio nario ženklą perkeliant jį į kitą lygties pusę ($\mathrm{N}\,p$) – Perkeliant bet kurį lygties narį iš vienos lygties pusės į kitą jo ženklo nekeisti *negalima* ($\overline{\mathrm{M}}\ \overline{p}$).
2) *Nebūtina* formules iškalti mintinai ($\overline{\mathrm{N}}\,p$) – *Galima* formulių neiškalti mintinai ($\mathrm{M}\ \overline{p}$).
3) Norint racionaliau skaičiuoti, *galima* taikyti sudėties ir daugybos veiksmų dėsnius ($\mathrm{M}\,p$) – Norint racionaliau skaičiuoti, *nebūtina* netaikyti sudėties ir daugybos veiksmų dėsnių ($\overline{\mathrm{N}}\ \overline{p}$).
4) Skaičiuojant *būtina* neužmiršti veiksmų eilės ($\mathrm{N}\ \overline{p}$) – Skaičiuojant *negalima* užmiršti veiksmų eilės ($\overline{\mathrm{M}}\,p$).
5) Metant monetą skaičius iškrinta *atsitiktinai* ($\mathrm{C}\,p$) – Metant monetą skaičius *nebūtinai* neiškrinta ir *nebūtinai* iškrinta ($\overline{\mathrm{N}}\ \overline{p} \wedge \overline{\mathrm{N}}\,p$) – Metant monetą, skaičius *gali* iškristi ir *gali* neiškristi ($\mathrm{M}\,p \wedge \mathrm{M}\ \overline{p}$).
6) Gerą pažymį mokinys gavo *neatsitiktinai* ($\overline{\mathrm{C}}\,p$) – Gerą pažymį mokinys *būtinai* gauna arba *būtinai* negauna ($\mathrm{N}\,p \vee \mathrm{N}\ \overline{p}$) – Gero pažymio mokinys *negali* negauti arba *negali* gauti ($\overline{\mathrm{M}}\ \overline{p} \vee \overline{\mathrm{M}}\,p$).

Nesunku pastebėti, kad lentelė gali būti sėkmingai naudojama vertimams iš vienos kalbos į kitą redaguoti.

7. SAMPROTAVIMAI

7.1. Bendros pastabos

Samprotavimas yra mąstymo procesas, kurio metu iš vieno, dviejų arba daugiau teiginių gaunamas naujas teiginys, išvestas iš pradinių teiginių. Samprotavimą sudaro šios dalys:

1) prielaidos, kurias vadiname *premisomis* (lot. *„praemissa“* – prielaida);
2) *išvada*;
3) logikos taisyklė, leidžianti iš premisų padaryti atitinkamą išvadą.

Samprotavimai skirstomi į *dedukcinius ir nededukcinius*. *Dedukcija* (lot. *„deductio“* – išvedimas) – išvadų gavimas iš premisų pagal logikos dėsnius. Dedukciniuose samprotavimuose iš teisingų premisų visuomet turime gauti teisingą išvadą. *Nededukciniu* vadinamas samprotavimas, kuriuo iš teisingų premisų galima gauti tik tikėtiną išvadą.

7.2. Dedukciniai samprotavimai

7.2.1. Išvados gavimas iš vienos premisos

Samprotavimas, kuriame išvada gaunama iš vienos premisos, vadinamas *tiesioginiu.* Jo loginis mechanizmas yra sprendinio subjekto ir predikato struktūros pertvarkymas. Pertvarkyti geriausiai sekasi atributyvius (savybių) sprendinius.

Konversijos (lot. *„conversio“* – pakeitimas) *būdu* išvada gaunama premisos subjektą padarius išvados predikatu, o premisos predikatą – išvados subjektu. Šio samprotavimo schemos:

1) Visi S yra P (*a*)
   Kai kurie P yra S (*i*)

2) Nė vienas S nėra P (*e*)
   Nė vienas P nėra S (*e*)

3) Kai kurie S yra P (*i*)
   Kai kurie P yra S (*i*)

Iš dalinių neigiamųjų sprendinių (*o*) konversijos būdu išvados gauti negalima. Kartais konversijos būdas be papildomos prielaidos gali duoti neteisingą išvadą, nors ir teisingai taikytume schemas.

Obversinio (lot. *„versio“* – atmaina) *samprotavimo* išvadoje premisos jungtis pakeičiama priešinga, o jos predikatas paneigiamas. Šio samprotavimo schemos:

1) Visi S yra P (*a*)
   Nė vienas S nėra $\overline{\text{P}}$ (*e*)

3) Kai kurie S yra P (*i*)
   Kai kurie S nėra $\overline{\text{P}}$ (*o*)

2) Nė vienas S nėra P (*e*)
   Visi S yra $\overline{\text{P}}$ (*a*)

4) Kai kurie S nėra P (*o*)
   Kai kurie S yra $\overline{\text{P}}$ (*i*)

Kontrapozicijos (lot. *„contrapositio“* – supriešinimas) *būdu* išvada gaunama taip pertvarkant premisą, kad išvados subjektu tampa premisos predikato neigimas, jungtis pakeičiama priešinga, o premisos subjektas tampa išvados predikatu. Šio samprotavimo schemos:

1) Visi S yra P (*a*)
   Nė vienas $\overline{\text{P}}$ nėra S (*e*)

2) Nė vienas S nėra P (*e*)
   Kai kurie $\overline{\text{P}}$ yra S (*i*)

3) Kai kurie S nėra P (*o*)
   Kai kurie $\overline{\text{P}}$ yra S (*i*)

Iš dalinių teigiamųjų sprendinių (*i*) kontrapozicijos būdu išvados gauti negalima.

Pateiksime visų išvados gavimo iš vienos premisos atvejų pavyzdžius visiems atributyviesiems sprendiniams (*a, e, i, o*):

Teiginys	**Visi iš 9 dalūs skaičiai (S) yra dalūs iš 3 (P) (*a*)**
Konversija	Kai kurie iš 3 dalūs skaičiai (P) yra dalūs iš 9 (S) (*i*)
Obversija	Nė vienas iš 9 dalus skaičius (S) nėra nedalus iš 3 ($\overline{\mathrm{P}}$) (*e*)
Kontrapozicija	Nė vienas nedalus iš 3 skaičius ($\overline{\mathrm{P}}$) nėra dalus iš 9 (S) (*e*)

Teiginys	**Nė vienas lygiakraštis trikampis (S) nėra statusis (P) (*e*)**
Konversija	Nė vienas statusis trikampis (P) nėra lygiakraštis (S) (*e*)
Obversija	Visi lygiakraščiai trikampiai (S) yra ne statieji ($\overline{\mathrm{P}}$) (*a*)
Kontrapozicija	Kai kurie ne statieji trikampiai ($\overline{\mathrm{P}}$) yra lygiakraščiai (S) (*i*)

Teiginys	**Kai kurie pirminiai skaičiai (S) yra lyginiai (P) (*i*)**
Konversija	Kai kurie lyginiai skaičiai (P) yra pirminiai (S) (*i*)
Obversija	Kai kurie pirminiai skaičiai (P) nėra nelyginiai ($\overline{\mathrm{P}}$) (*o*)

Teiginys	**Kai kurie stačiakampiai (S) nėra kvadratai (P) (*o*)**
Obversija	Kai kurie stačiakampiai (S) yra ne kvadratai ($\overline{\mathrm{P}}$) (*i*)
Kontrapozicija	Kai kurie ne kvadratai ($\overline{\mathrm{P}}$) yra stačiakampiai (S) (*i*)

3-io pavyzdžio 3-ia eilutė ir 4-o pavyzdžio 2-a ir 3-ia eilutės skamba ne visai taip, kaip esame įpratę kalbėti. Iš tiesų, išvados gavimas iš vienos premisos ypač taikomas redaguojant vertimus: pažodiniuose vertimuose įmanoma (ypač verčiant iš prancūzų k. į lietuvių k.) gauti net po keletą neiginių. Taigi vertime gavus aukščiau nurodytas eilutes, jos paprastai keičiamos pirmąja eilute.

Iš reliacinių santykių sprendinių tiesiogiai išvadas galima padaryti tik tuo atveju, jei tarp objektų *x* ir *y* yra simetrijos (gr. „*symmetrija*“ – atitikimas) santykis. Šio samprotavimo schema:

$$\frac{\begin{array}{l} x\mathrm{R}y \\ \mathrm{R\ sim} \end{array}}{y\mathrm{R}x}$$

Šia schema ir remiasi visi matematiniai pertvarkiai: cos (90° – *x*) = sin *x* ir pan.

7.2.2. Silogizmai

Silogizmą (gr. *,,syllogismos"* – dedukcinis samprotavimas) sudaro dvi premisos ir viena išvada. Premisos ir išvada yra visų tipų (*a, e, i, o*) atributyvūs (savybių) sprendiniai. Sąvokos, esančios silogizmo premisose ir išvadoje, vadinamos *silogizmo terminais* (lot. *,,terminus"* – riba, siena). Kiekviename silogizme yra trys terminai:

1) išvados subjektas – *mažasis terminas*, žymimas raide S;

2) išvados predikatas – *didysis terminas,* žymimas raide P;

3) terminas, kuris yra abiejose premisose ir kurio nėra išvadoje, – *vidurinysis terminas,* žymimas raide M. Didysis ir mažasis terminai vadinami *kraštutiniais terminais.*

Pvz.:

Visi kvadratai (M) turi lygias kraštines (P) (*a*)
<u>Ši figūra (S) yra kvadratas (M) (*a*)</u>
Ši figūra (S) turi lygias kraštines (P) (*a*)

Silogizmas yra dedukcinis samprotavimas, iš kurio nustatomas ryšys tarp kraštutinių išvados terminų, remiantis jų santykiu su viduriniuoju premisos terminu. Toji premisa, kurioje yra didysis terminas, vadinama *didžiąja premisa*, o toji, kurioje yra mažasis terminas – *mažąja premisa*. Paprastai didžioji silogizmo premisa rašoma pirmoje eilutėje. Iš duotųjų premisų silogizme išvedama ne bet kokia išvada, o tokia, kokią leidžia *silogizmo taisyklės*, kurios skirstomos į terminų ir premisų taisykles.

Terminų taisyklės yra trys:

1) *Kiekviename silogizme turi būti tik trys terminai: mažasis, didysis ir vidurinysis*. Iš dviejų terminų išvados negausime – nėra juos siejančio termino. Jei terminų yra daugiau kaip trys, išvados gauti irgi negalima. *Terminų suketverinimas* yra klaida, kuri atsiranda, kai vidurinysis terminas vienoje premisoje vartojamas viena reikšme, o antroje premisoje – kita reikšme (tapatybės dėsnio pažeidimas).

Iš premisų:

Kvadratas yra stačiakampis su lygiomis kraštinėmis

Skaičius 9 yra skaičiaus 3 kvadratas

neišplaukia jokia išvada, nes terminas ,,kvadratas" čia naudojamas 2 prasmėmis: kaip figūra ir kaip kėlimo antruoju laipsniu rezultatas. Todėl silogizme būtų 4 terminai.

2) *Vidurinysis terminas turi būti suskirstytas bent vienoje premisoje*.

Iš premisų:

Kai kurie skaičiai yra pirminiai

Taisyklingosios trupmenos – skaičiai

neišplaukia jokia išvada. Vidurinysis terminas ,,skaičiai" yra didžiosios premisos subjektas, o dalinio teigiamojo sprendinio (*i*) subjektas yra nesuskirstytas. Mažojoje premisoje vidurinysis terminas ,,skaičiai" yra predikatas, o bendro teigiamojo sprendinio (*a*) predikatas yra nesuskirstytas.

3) *Terminas, nesuskirstytas premisoje, negali būti suskirstytas išvadoje.* Pažeidus šią taisyklę, daroma klaida, vadinama *neteisėtu termino išplėtimu.*

Iš premisų:

Visi lyginiai natūralieji skaičiai dalijasi iš 2

Skaičius -120 nėra lyginis natūralusis skaičius

išvada „Skaičius -120 nesidalija iš 2" neišplaukia. Didysis terminas „dalijasi iš 2" pirmojoje premisoje nesuskirstytas (kaip bendrojo teigiamojo sprendinio (*a*) predikatas), o išvadoje šis terminas turėtų būti suskirstytas (kaip bendro neigiamojo sprendinio (*e*) predikatas). Pažymėjus D visus skaičius, kurie dalijasi iš 2, o lyginius natūraliuosius skaičius pažymėjus L, turėsime $L \subset D$, o ne $L=D$, kaip atsitiktų, jei priimtume aukščiau suformuluotą išvadą ir neteisėtai būtų išplėstas vidurinysis terminas „lyginiai natūralieji skaičiai", t. y. jiems ir tik jiems būtų priskiriama savybė „dalytis iš 2".

Premisų taisyklės yra penkios:

1) *Iš dviejų dalinių premisų negalima padaryti jokios išvados.*

Iš premisų:

Kai kurie skaičiai yra natūralieji (*i*)

Kai kurie skaičiai nėra racionalieji (*o*)

neišplaukia jokia išvada.

2) *Jei viena premisa dalinė, tai ir išvada dalinė.*

Pavyzdys:

Sąlyga $f(-x) = f(x)$ (P) reiškia, kad funkcija yra lyginė (M) (*a*)

<u>Kai kurios funkcijos (S) nėra lyginės (M) (*o*)</u>

Kai kurios funkcijos (S) netenkina sąlygos $f(-x) = f(x)$ (o)

3) *Iš dviejų neigiamų premisų negalima padaryti jokios išvados.*

Iš premisų:

Kai kurie trikampiai nėra taisyklingosios figūros (*o*)

Šiame figūrų rinkinyje nėra trikampių (*e*)

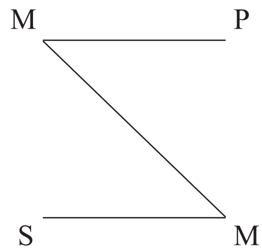
neišplaukia jokia išvada.

4) *Jei viena iš premisų neigiama, tai ir išvada neigiama.* Čia tinka antrosios taisyklės pavyzdys.

5) *Jei abi premisos yra teigiamos, tai negalima padaryti neigiamos išvados.* Čia tinka pavyzdys, pateiktas po silogizmo apibrėžimo.

Silogizmo figūros. Priklausomai nuo viduriniojo termino padėties premisose, galimos keturios silogizmų formos, vadinamos silogizmo figūromis.

1) *Pirmojoje figūroje vidurinysis terminas yra didžiosios premisos subjektas ir mažosios premisos predikatas.* Jos schema:



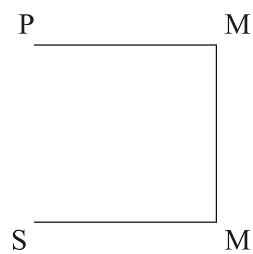
Pirmosios figūros taisyklės:

a) didžioji premisa turi būti bendra (*a* arba *e*);

b) mažoji premisa turi būti teigiama (*a* arba *i*).

Čia vėl tinka pavyzdys, pateiktas po silogizmo apibrėžimo.

2) *Antrojoje figūroje vidurinysis terminas yra abiejų premisų predikatas. Jos schema:*



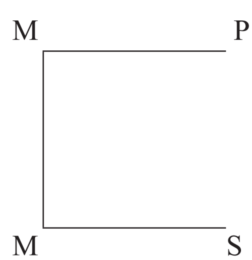
Antrosios figūros taisyklės:

a) didžioji premisa turi būti bendra (*a* arba *e*);

b) viena iš premisų turi būti neigiama (*e* arba *o*).

Silogizmo, kurio figūra yra antroji, pavyzdys – silogizmas, iliustruojantis antrąją premisų taisyklę.

3) *Trečiojoje figūroje vidurinysis terminas yra abiejų premisų subjektas.* Jos schema:



Trečiosios figūros taisyklės:

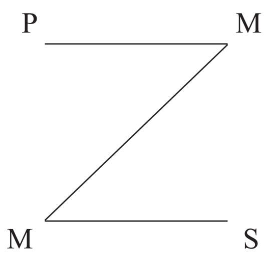
a) mažoji premisa turi būti teigiama (*a* arba *i*);

b) išvada turi būti dalinis sprendinys (*i* arba *o*).

Pvz.:

Kai kurie daugiakampiai (M) – taisyklingi (P) (*i*)
Daugiakampiai (M) – geometrinės figūros (S) (*a*)
Kai kurios geometrinės figūros (S) – taisyklingos (P) (*i*).

4) *Ketvirtojoje figūroje vidurinysis terminas yra didžiosios premisos predikatas ir mažosios premisos subjektas.* Jos schema:



Ketvirtosios figūros taisyklės:

a) jei didžioji premisa yra teigiama (*a* arba *i*), tai mažoji premisa yra bendra (*a* arba *e*);

b) jei viena iš premisų yra neigiama (*e* arba *o*), tai didžioji premisa yra bendra (*a* arba *e*).

Pvz.:

Kai kurie trikampiai (S) yra lygiakraščiai (M) (*i*)
Lygiakraščiai trikampiai (M) – taisyklingos figūros (P) (*a*)
Kai kurie trikampiai (S) – taisyklingos figūros (P) (*i*).

Silogizmo figūrų modusai – tai atskiri silogizmo figūrų atvejai, besiskiriantys premisų ir išvados ryšio kiekybe ir kokybe. Kadangi silogizmo premisas ir išvadą sudaro keturių tipų (*a, e, i, o*) sprendiniai, tai, atsižvelgiant į tai, kokie sprendiniai sudaro premisas ir išvadą, skiriami $4^3 = 64$ silogizmų modusai. Tačiau iš 64 teoriškai galimų modusų tik 19 yra taisyklingi (t. y. nepažeidžiantys aukščiau pateiktų taisyklių):

a) I figūroje: *aaa, eae, aii, eio*;
b) II figūroje: *eae, aee, eio, aoo*;
c) III figūroje: *aai, iai, aii, eao, oao, aio*;
d) IV figūroje: *aai, aee, iai, eao, eio*.

7.2.3. Išvados iš sudėtinių teiginių

Samprotavime, kurio viena premisa yra teisingas implikacinis teiginys, o kita premisa – paprastas teiginys, teisinga išvada gaunama dviem atvejais.

1) *Jei antroji premisa patvirtina antecedento teisingumą, tai išvadoje patvirtinamas konsekvento teisingumas.* Samprotavimo schema:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \end{array}}{q}$$

Pavyzdys:

Jei skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 9 (*p*), tai tas skaičius dalijasi iš 9 (*q*)
<u>Skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 9 (*p*)</u>
Skaičius dalijasi iš 9 (*q*).

2) *Jei antroji premisa neigia konsekventą, tai išvadoje neigiamas antecedentas.* Samprotavimo schema:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ \overline{q} \end{array}}{\overline{p}}$$

Pavyzdys:

Jei skaičius baigiasi 0 ar 5 (*p*), tai jis dalijasi iš 5 (*q*)
<u>Skaičius nesidalija iš 5 ($\overline{q}$)</u>
Skaičius nesibaigia 0 ar 5 ($\overline{p}$).

Samprotavime neigiant antecedentą arba teigiant konsekventą, išvada nebūtinai seka iš premisų.

Samprotavime, kurio abi premisos yra implikaciniai teiginiai, gaunama teisinga išvada, jei pirmosios premisos konsekventas yra antros premisos antecedentas. Jo išvada yra sudaryta iš pirmos premisos antecedento ir antros konsekvento. Samprotavimo schema:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{p \to r}$$

Implikacinio teiginio antecedento ir konsekvento ryšys dažnai gali būti apibūdintas kaip priežasties ir jos pasekmės ryšys, todėl aukščiau pateiktą taisyklę tada galima formuluoti taip: *pasekmės pasekmė yra priežasties pasekmė.*

Samprotavime, *kurio viena premisa yra griežtosios disjunkcijos teiginys, o kita premisa – paprastasis teiginys, kuris teigia arba neigia vieną iš disjunkcijos narių, išvada neigia arba teigia kitą disjunkcijos narį.* Samprotavimo schema:

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ p \end{array}}{\overline{q}} \qquad \text{arba} \qquad \frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \overline{p} \end{array}}{q}$$

Pavyzdys:

Metant monetą, iškrenta skaičius (*p*) arba herbas (*q*)
<u>Iškrito skaičius (*p*)</u>
Vadinasi, neiškrito herbas ($\overline{q}$).

Analogiškai, neiškritus skaičiui ($\overline{p}$), iškris herbas (*q*).

Samprotavimas, kurio premisas sudaro implikaciniai ir disjunkciniai teiginiai, vadinamas *dilema* (gr. *„di“* – du, *„lemma“* – sakinys). Dilemos gali būti *paprastosios* ir *sudėtinės.* Paprastosios dilemos schemos:

$$\text{a) } \frac{\begin{array}{c} (p \to r) \wedge (q \to r) \\ p \vee q \end{array}}{r} \qquad \text{b) } \frac{\begin{array}{c} (p \to q) \wedge (p \to r) \\ \overline{q} \vee \overline{r} \end{array}}{\overline{p}}$$

Pavyzdžiai:

a) Jei turime reiškinį $\sin^2\alpha$ (*p*), tai jis lygus 1 (*r*) ir, jei turime reiškinį $0{,}5\cdot 2$ (*q*), tai jis lygus 1 (*r*)
<u>Paėmus $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ (*p*) arba $0{,}5\cdot 2$ (*q*)</u>
Gausime 1 (*r*).

b) Jei turime 1 (*p*), tai jis lygus $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ (*q*), ir, jei turime 1 (*p*), tai jis lygus $0{,}5\cdot 2$ (*r*)
<u>Skaičius nelygus $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ ($\overline{q}$) arba jis nelygus $0{,}5\cdot 2$ ($\overline{r}$).</u>
Skaičius nelygus 1 ($\overline{p}$).

Sudėtinės dilemos schemos:

$$\text{a) } \frac{\begin{array}{c} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ p \vee r \end{array}}{q \vee s} \qquad \text{b) } \frac{\begin{array}{c} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ \overline{q} \vee \overline{s} \end{array}}{\overline{p} \vee \overline{r}}$$

Galimi ir sudėtingesni implikacinio-disjunkcinio samprotavimo variantai: *trilemos* ir *polilemos.*

7.2.4. Entimema

Entimema (gr. *„en thymo"* – mintyse) yra samprotavimas, kuriame praleista premisa arba išvada, tačiau trūkstamoji dalis yra numanoma. Kalboje dažniausiai vartojamos entimemos kaip silogizmų santrumpos, siekiant lakoniškumo. Dažniausiai yra praleidžiama viena iš premisų. *Norint patikrinti, ar entimema yra teisinga, reikia atkurti pilną samprotavimą.* Jei jis bus teisingas, tai ir entimema bus teisinga.

Aukščiau pateiktų atitinkamas silogizmų figūras iliustruojančių pavyzdžių entimemos skambėtų taip: 1) Kadangi ši figūra yra kvadratas, tai jo visos kraštinės lygios; 2) Kadangi kai kurios funkcijos nėra lyginės, tai jos netenkina sąlygos $f(-x)=f(x)$; 3) Kai kurios geometrinės figūros – taisyklingos; 4) Kai kurie trikampiai – taisyklingos figūros (praleidžiamos net abi premisos).

7.3. Nededukciniai samprotavimai

7.3.1. Nededukcinio samprotavimo sąvoka

Samprotavimas, kuriuo iš teisingų prielaidų galima gauti tik tikėtiną išvadą, vadinamas *nededukciniu samprotavimu.* Taip gautų išvadų teisingumui nustatyti taikomas faktinis patikrinimas.

7.3.2. Indukcija

Toks samprotavimo būdas, kai, ištyrus keletą kokios nors klasės objektų ir nustačius, kad jie turi tam tikrą savybę, daroma išvada, kad tą savybę turi visi tos klasės objektai, vadinamas *indukcija* (lot. *„inductio"* – įvedimas). Indukcija gali būti pilnoji ir nepilnoji. *Pilnoji indukcija* yra tada, kai išvada daroma, remiantis kiekvieno tos klasės objekto ištyrimu. Jos išvada yra visuomet teisinga, jei tik tiksliai ištiriami visi tiriamosios klasės objektai. Todėl pilnoji indukcija tik savo forma – samprotavimo eiga yra indukcija, o faktiškai ji yra dedukcija.

Pvz.: Kokie pirminiai skaičiai yra intervale [12; 18]?

Ats.: 13; 17.

Nepilnojoje indukcijoje išvada, kad visi tiriamosios klasės objektai turi tam tikrą savybę, daroma remiantis tuo, kad tarp ištirtųjų klasės objektų neatsirado nei vieno, kuris neturi tos savybės. Kadangi čia ištiriami ne visi objektai, išvada tik tikėtina. Nepilnoji indukcija dar vadinama *populiariąja.* Populiariąja indukcija, kaip matysime kituose šios monografijos skyriuose, pagrįstas matematikos mokymas: žemesnėse klasėse nuolat, o vyresniosiose klasėse dažnai ja naudojamasi supažindinant mokinius su įvairiais matematikos dėsniais, algoritmais, teiginiais ir t. t. Pedagogai tuo remiasi drąsiai, nes už jų nugaros stovi matematikos mokslas, kuriame visa tai yra griežtai įrodyta. Nepilnojoje indukcijoje galima klaida, vadinama *skubotu apibendrinimu.* Priežastis ta, kad išvada daroma netiksliai arba per mažai ištyrus objektus. Pateiksime keletą skuboto apibendrinimo pavyzdžių matematikoje. Jei paimtume reiškinį $y=n^2+n+17$, tai, imdami įvairias natūraliąsias reikšmes iki $n=15$, gautume, kad reiškinio reikšmės būtų pirminiai skaičiai. Todėl yra realus pavojus skubotai apibendrinti – laikyti, kad šio reiškinio reikšmės yra pirminiai skaičiai visoms natūraliosioms n reikšmėms. Bet tai netiesa, nes, kai $n=16$, turėsime:

$$y=16^2+16+17=16\cdot(16+1)+17=16\cdot 17+17=17\cdot(16+1)=17\cdot 17=289,$$

t. y. sudėtinį skaičių.

Yra žinoma, kad būtent skaičių teorijoje, tyrinėjant pirminius skaičius, dar vis yra neatsakytų klausimų. Prancūzų matematikas Pjeras de Ferma (*de Fermat,* 1601–1665) manė atradęs reiškinį, kurio, kaip ir aukščiau mūsų pateiktojo, visos reikšmės, imant įvairias natūraliąsias n reikšmes, bus pirminiai skaičiai. Šis reiškinys yra:

$$y=2^{2^n}+1.$$

Iš tiesų, kai $n=1$; 2; 3; 4, y – pirminis skaičius. Kadangi, kai $n=3$; 4 skaičiavimai buvo jau gana sudėtingi (XVII a. jokios skaičiavimo technikos nebuvo), P. Ferma pasidavė skuboto apibendrinimo suvedžiojimams. Netrukus buvo apskaičiuota šio reiškinio reikšmė, kai $n=5$, ir ji buvo sudėtinis skaičius. Tą padarė L. Oileris, parodęs, kad tas skaičius dalijasi iš 641.

Samprotaujant apie reiškinių priežastinius ryšius, galima klaida – samprotavimas pagal principą: *po to, vadinasi, dėl to.* Bandant laikyti aplinkybę A reiškinio a priežastimi, nepakanka to, kad ji yra ankstesnė už reiškinį a, o reikia nustatyti, kad aplinkybė A būtinai lemia reiškinį a. Jei žinomos kelios aplinkybės, kurių kiekviena gali būti tiriamojo reiškinio priežastimi, tai jos visos nuosekliai nagrinėjamos ir atmetinėjamos, kol lieka viena, kurios atmesti nepajėgiama. Taip sumažinama atsitiktinės išvados galimybė. Toks samprotavimas vadinamas *eliminacine* (lot. *„eliminatio“* – pašalinimas, išvarymas) arba *Bekono – Milio** *indukcija.* Jos pagrindiniai metodai yra keturi:

1) *Vienintelio panašumo metodas*, kurio schema tokia: reiškinį a lemia aplinkybės ABCE, ADEF, AGHF; tikėtina, kad reiškinio a priežastis – aplinkybė A.

2) *Vienintelio skirtumo metodas*, kurio schema: reiškinį a lemia aplinkybės ABC, o jo nelemia aplinkybės BC; tikėtina, kad A yra reiškinio a priežastis.

3) *Lydimųjų kitimų* metodas. Jo schema: aplinkybės A_1BC, A_2BC, A_3BC lemia atitinkamai reiškinius a_1, a_2, a_3; tikėtina, kad aplinkybė A yra reiškinio a priežastis.

4) *Liekanų metodas.* Jo schema: aplinkybės ABCD lemia reiškinius *abcd*, o aplinkybės BCD – reiškinius *bcd*; tikėtina, kad A lemia a.

---

* Fransis Bekonas, Beikonas (*Bacon*, 1561–1626) ir Džonas Stiuartas Milis (*Mill*, 1806–1873) – anglų filosofai.

Siekiant sumažinti neteisingos išvados galimybę, indukcija vartojama kartu su dedukcija. Atsižvelgiant į pastarosios vaidmenį, skiriami du *mokslinės indukcijos* variantai:

1) *Indukcija, parenkant atvejus, kuriuose negalimi atsitiktiniai apibendrinimai.* Dedukcija čia reikalinga iš anksto sudaryti tyrimo planui.

2) *Indukcija, kurios išvada patikrinama dedukcija*. Deduktyviai pagrįsta indukcijos išvada yra teisinga, o ištirtų objektų skaičius neturi reikšmės. Atskiras ir patikimiausias atvejis – *matematinė indukcija.* Apie ją kalbėsime kituose monografijos skyriuose.

7.3.3. Analogija

Analogija (gr. *„analogija“* – atitikimas) yra toks samprotavimas, kai iš dviejų objektų panašumo keliais požymiais daroma išvada, kad tie objektai panašūs ir likusiais požymiais. Samprotavimo schema: objektas x turi požymius abc, objektas y – požymius ab; tikėtina, kad y turi požymį c. Išvados tikėtinumo laipsnis priklauso nuo keleto veiksnių.

1) *Požymių, bendrų lyginamiesiems objektams, reikšmingumas.* Samprotaujant bendri lyginamųjų objektų požymiai turi būti esminiai, tipiniai.

2) *Bendrų esminių požymių skaičius.* Kuo daugiau lyginamieji objektai turės bendrų esminių požymių, tuo išvada bus patikimesnė.

3) *Perkeliamasis požymis turi būti to paties tipo, kaip ir bendrieji lyginamųjų objektų požymiai.* Analogijos būdu gautos išvados patikrinamos *faktiniu* arba *dedukcijos* būdais. Pagrindinės analogijos klaidos:

a) lyginami objektai, neturintys bendrų esminių požymių;

b) lyginant objektus, turinčius bendrus požymius, nežinoma arba ignoruojama, jog vieno objekto tam tikras požymis yra nesuderinamas su kito objekto tam tikru požymiu.

Analogija plačiai taikoma mokymo procese, realizuojant tiek vidinę dalykinę, tiek tarpdalykinę integraciją.

Pirmuoju atveju geras pavyzdys gali būti analogijos tarp planimetrijos ir stereometrijos panaudojimas. Antai analogija panaudotina jau pateikiant pirmąją stereometrijos aksiomą: „Per 3 taškus, nesančius vienoje tiesėje, galima nubrėžti plokštumą ir tiktai vieną“. Čia analogijos ieškoma su pirmąja planimetrijos aksioma: „Per 2 taškus galima nubrėžti tiesę ir tiktai vieną“. Kituose šios monografijos skyriuose pateiksime daugiau vidinės dalykinės integracijos panaudojant analogiją pavyzdžių.

Antruoju atveju pavyzdys gali būti mokinių supažindinimas su koordinačių (lot.*„ordinatus“* – tvarkingas) metodu. Paprastai mokytojas pamoką pradeda klausimu: „Kaip jūs surandate savo vietą teatro salėje?“ Mokinių atsakymai padeda suvokti, kad biliete nurodyta eilė ir vieta bus žiūrovo koordinatės salėje. Taigi čia panaudojama integracija su realiu gyvenimu. Panaudotina ir integracija su geografija (geografinė ilguma ir platuma).

7.3.4. Hipotezė

Hipoteze (gr. *„hypothesis“* – spėjimas) vadinamas moksliškai pagrįstas naujų dėsnių, jų struktūrų bei ryšių numatymas. Jis naudojamas, kai reiškinio priežastiniams ryšiams paaiškinti neužtenka žinomų faktų, kai jie labai sudėtingi. Hipotezė tada padeda faktus interpretuoti. Ji padeda ir tada, kai priežastys, lemiančios reiškinio atsiradimą arba jo funkcionavimą, yra patirčiai neprieinamos, o gali būti tiriamas jų veikimas ar padariniai. Hipotezės formulavimo ir pritaikymo procesas skaidomas į šiuos etapus:

a) tyrimas kokio nors objekto, kurio egzistavimo turimomis mokslinio tyrimo priemonėmis kol kas negalima atskleisti;
b) reiškinių, aplinkybių, susijusių su tyrimo objektu, visumos išaiškinimas, studijavimas;
c) hipotezės formulavimas – mokslinis numatymas priežasčių, lemiančių tyrimo objekto atsiradimą;
d) vienos ar kelių pasekmių, logiškai išplaukiančių iš numanomos priežasties, apibrėžimas;
e) patikrinimas, kiek šios pasekmės atitinka tikrovę. Jei patikrinimo rezultatai teigiami, hipotezė laikoma pagrįsta. Tada ji įtraukiama į tam tikrų žinių sistemą. Jos suderinamumas su kitomis žiniomis irgi patvirtina neprieštaravimą realybei.

Kaip jau minėjome, dar daug neišspręstų klausimų yra pirminių skaičių teorijoje. Antai prancūzų matematikas Žozefas Lui Fransua Bertranas (*Bertrand*, 1822–1900) suformulavo hipotezę – Bertrano postulatą: „Tarp skaičių n ir $2n$-2, kai $n \geq 4$, yra bent vienas pirminis skaičius“, kurį įrodė rusų matematikas Pafnutijus Čebyšovas (1821–1894) [119, p. 52]. Vienas žymiausių Lietuvos matematikų Jonas Kubilius (g. 1921) įrodė susilpnintą vokiečių matematiko Edmundo Georgo Hermano Landau (*Landau*, 1877–1938) hipotezę dėl racionalaus pirminio skaičiaus reiškimo dviejų skirtingo dydžio sveikųjų skaičių kvadratų suma [119, p. 295].

Hipotezės nuolat formuluojamos ir tikrinamos taikant matematinės statistikos metodus (statistinės, nulinės hipotezės), atliekant bet kuriuos mokslinius tyrimus, pvz., rašant diplominius, magistro darbus, disertacijas.

Apie hipotezių formulavimą ir tikrinimą matematikos mokymo procese daug bus kalbama kituose šios monografijos skyriuose.

8. ĮRODYMAS

Įrodymas yra kurio nors teiginio ar teorijos teisingumo nustatymas, remiantis kitais teiginiais ar teorijomis, kurių teisingumu neabejojama. Įrodymą sudaro:

a) *įrodymo tezė* (pr. *,,thèse"*, lot. *,,thesis"* – teiginys) *(išvada)* – teiginys, kurį reikia įrodyti; matematikoje tezė dažniausiai vadinama *teorema* (gr. *,,thēorēma"* – tezė, reikalaujanti įrodymo), kartais *išvada*, pagalbinės teoremos, įrodomos specialiai tam, kad būtų galima įrodyti kurią nors teoremą vadinamos *lemomis* (gr. *,,lēmma"* – prielaida);

b) *įrodymo argumentai* (lot. *,,argumentum"* – įrodymo pagrindas) *(prielaidos)* – teiginiai, kuriais remiantis įrodoma tezė;

c) *įrodymo būdas (įrodymo demonstravimas)* – loginis tezės išvedimo iš argumentų procesas. Įrodyme būtina laikytis tam tikrų taisyklių. *Įrodymo tezės taisyklė:* tezė turi būti tiksliai apibrėžta ir išlikti nepakitusi įrodymo procese. Pažeidus šią taisyklę, daroma klaida, vadinama *tezės pakeitimu.* Ji pasireiškia įvairiai:

1) įrodoma ne pateiktoji tezė, bet visai kita; kartais tai yra net naudinga: vokiečių matematikas Richardas Emilis Liudvikas Becas (*Beez*, 1827–1902) 1875 m., bandydamas įrodyti daugiamatės geometrijos prieštaringumą, įrodė priešingą teiginį – kad ši geometrija neprieštaringa [119, p. 39];

2) panaudojamas *,,argumentum ad hominem"* (lot.) – įrodymas, remiantis ,,žmogumi":

a) kai apeliuojama į tezę pateikusio asmens savybes; pvz.: ,,Šis kontrolinis darbas vertintinas ,,10", nes jį atliko mokslo pirmūnas" ir pan.;

b) kai remiamasi autoritetais, jų veikalų citatomis (lot. *,,argumentum ad persona"*); pvz., taip buvo sukurtas visas marksizmo ,,mokslas";

3) panaudojamas *,,argumentum ad populum"* (lot.) – kai įrodinėjama remiantis publikos, ,,liaudies" nuomone, emocijomis. Pvz.: tuo buvo remiama visa SSRS vidaus ir užsienio politika: ,,suorganizavus" ,,liaudies masių" laiškus, buvo priimami iš esmės antiliaudiniai nutarimai.

Argumentų taisyklės:

1) argumentai turi būti teisingi ir pakankamai pagrįsti tezę; klaidingų argumentų pateikimas vadinamas *pagrindine klaida* (lot. *,,error fundamentalis"*);

2) argumentų teisingumas turi būti įrodytas nepriklausomai nuo tezės; nesilaikant šios taisyklės daroma *rato klaida* – argumentų teisingumas įrodomas, remiantis teze. Matematikos istorija žino 2 ryškius tokių klaidų darymo pavyzdžius. Pirmas – penktasis Euklido (*Eukleidēs*, apie 365 –300 pr. Kr.) postulato: ,,Jeigu tiesė, kertanti dvi tieses, iš vienos pusės sudaro vidinius kampus, mažesnius už du stačius, tai neribotai pratęstos šios tiesės susikirs iš tos pusės, iš kurios kampai mažesni už du stačius", kitaip vadinamo lygiagretumo aksioma, pripažinimo postulatu istorija.

Antras pavyzdys – P. de Ferma didžioji teorema: „Lygtis $x^n+y^n=z^n$, kurioje n – sveikasis skaičius, didesnis už 2, neturi sveikųjų teigiamų sprendinių“ [119, p. 42]. Kaip žinoma, apie 2 tūkst. metų daugelis matematikų bandė įrodyti, kad penktasis Euklido postulatas – ne postulatas, o teorema, tad ir bandė jį įrodyti, kaip teoremą. Visuose įrodymuose būdavo daromos klaidos – nejučiomis pasiremiama arba pačiu penktuoju postulatu, arba iš jo išplaukiančiomis išvadomis. Apie 350 metų tęsėsi bandymai įrodyti ir P. de Ferma didžiąją teoremą. Daugelyje įrodymų irgi buvo nejučiomis pasiremiama ja pačia. Tą klaidą savo įrodymuose darė ir lietuvis Zigmas Rupeika (1898–1973). Kaip žinoma, pirmųjų įrodinėjimų seriją nutraukė rusų matematiko Nikolajaus Lobačevskio (1792–1856), sukūrusio neeuklidinę (Lobačevskio) geometriją, paremtą postulatu, priešingu penktajam Euklido postulatui, darbai. Antrųjų įrodinėjimų pabaiga buvo 1994 m., kai JAV matematikas Endriu Vailesas (*Andrew Wiles*) ir D. Britanijos matematikas R. Teiloras (*Taylor*) [32, p. 115; 116, p. 42] įrodė šią teoremą. Beje, šios teoremos įrodymas vyko tam tikrais etapais: kai n=3 ir n=4, ją įrodė vokietis L. Oileris, kai n=5 – prancūzas Andrijenas Mari Ležandras (*Legendre*, 1752–1833) ir vokietis Peteris Gustavas Leženas Dirichlė (*Dirichlet*, 1805–1859), kai n=7 – prancūzas Gabrielis Lamė (*Lamé*, 1795–1870). Pirminiams skaičiams nuo 3 iki 97 šią teoremą įrodė vokietis Ernstas Eduardas Kumeris (*Kummer*, 1810–1893) [119, p. 282].

Įrodymo būdo taisyklė: įrodymo būdas turi būti logiškas – tezė iš argumentų turi būti gaunama pagal logikos taisykles. Loginės klaidos yra paralogizmai ir sofizmai. *Paralogizmas* (gr. *„paralogismos“* – klaidinga išvada) – loginė klaida, padaroma netyčia, neapgalvotai arba iš anksto apgalvotai, tačiau neturint tikslo ką nors apgauti. *Sofizmas* (gr. *„sophia“* – išmintis, *„sophizma“* – vingrybė) – sąmoningai sudarytas klaidingas samprotavimas, kuris pateikiamas kaip teisingas. Mokykloje dažnai matematiniai paralogizmai (sofizmai) panaudojami, norint akivaizdžiai parodyti, kokių klaidų reikia vengti, atliekant matematinius pertvarkius. Antai, norint parodyti neteisingo kėlimo prieš skliaustus žalą, tiks pavyzdys: „Turime lygybę: $4 : 4 = 5 : 5$. Po pertvarkių gausime: $4\ (1 : 1) = 5\ (1 : 1)$, $4 = 5$, $2 \cdot 2 = 5$“. Parodant dalybos iš reiškinio, lygaus nuliui, sukeliamas problemas, tiks pavyzdys:

„Sakykime, $a = b + c$. Padauginkime abi puses iš 5:

$5a = 5b + 5c$. Sudėkime panariui su lygybe

$4b + 4c = 4a$ ir iš abiejų gautosios lygybės pusių atimkime $9a$.

Gausime $4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a$, arba $4(b + c - a) = 5(b + c - a)$, $4 = 5$“.

Kituose monografijos skyriuose parodysime nekorektiško kvadratinės šaknies traukimo sukeltą problemą.

Pagal įrodymo būdą įrodymai skirstomi į tiesioginius ir netiesioginius. *Tiesioginis įrodymas* – toks, kai tezė išvedama iš pateiktų argumentų. Jei pateiktieji argumentai teisingi, tai tezė, išvesta iš jų pagal logikos taisykles, bus įrodyta ir teisinga. *Netie-*

sioginiame įrodyme tezės teisingumas yra nustatomas įrodant tezei prieštaraujančių teiginių klaidingumą. Kai įrodoma, kad prieštaraujantis teiginys yra klaidingas, tai iš to išplaukia, kad įrodomoji tezė yra teisinga. Pavyzdžiui, įrodant teoremą: „Iš taško, esančio šalia tiesės, galima nuleisti į ją statmenį ir tiktai vieną“ remiamasi prieštaravimu. „Nuleidžiami“ 2 statmenys, „gaunamas“ trikampis su 2 stačiaisiais kampais ir taip įrodoma, kad statmuo iš tiesų turi būti vienintelis.

Įrodymai gali būti dvejopi ir pagal įrodymo tikslą. Jei nustatomas tezės teisingumas, turime tiesiog įrodymą, o jei nustatomas tezės klaidingumas, turime paneigimą. Jo būdai yra keli.

1) *Argumentų paneigimas.* Paneigiant argumentus, įrodoma, kad jie yra klaidingi.

Naudojant klaidingus argumentus, galima įrodyti bet ką. Tačiau argumentų paneigimas dar neįrodo tezės klaidingumo: teisingas teiginys, nors ir retai, gali išplaukti iš klaidingo.

2) *Įrodymo būdo paneigimas.* Juo nustatoma, kad iš pateiktų argumentų seka ne norima įrodyti tezė, o visai kita. Įrodymo būdo paneigimas tačiau nereiškia norimos įrodyti tezės klaidingumo: paprasčiausiai galėjo būti pasirinktas negeras įrodymo būdas.

3) *Išvedamų iš tezės išvadų paneigimas.* Jei nustatoma, kad įrodytos tezės išvados yra klaidingos, tai ir pati tezė klaidinga.

II. MATEMATINĖS SĄVOKOS

1. MATEMATINĖS SĄVOKOS SAMPRATA

Matematikos žinių mokykloje neįmanoma gerai įsisavinti neugdant kryptingo mąstymo, todėl tai yra vienas svarbiausių mokymo uždavinių. Psichologijoje mąstymas apibrėžiamas kaip žmogaus sąmonėje atspindimo objekto apibrėžtų pusių ir savybių išskyrimas bei jų susiejimas su kitais objektais siekiant įgyti naujų žinių. Taigi mąstymas – aktyvus objektyvaus pasaulio atspindėjimas žmogaus sąmonėje. Atskirų minčių ir jų junginių struktūras vadiname *mąstymo formomis*. Mąstymo formų teisingumas užtikrina objektyvų, teisingą realios tikrovės objektų ir reiškinių nagrinėjimą, tvirtų ir patikimų žinių apie pasaulį formavimą. Formaliojoje logikoje skiriamos trys pagrindinės mąstymo formos: *sąvokos*, *teiginiai bei sprendiniai* ir *samprotavimai*.

Tikrovė pažįstama *jutiminio* (pojūčiai, suvokimas, vaizdiniai) ir *racionalaus* (lot. *„rationalis“* – protingas) (sąvokos, sprendiniai, teiginiai, samprotavimai) *pažinimo* būdu. Pojūčiai ir suvokimas – pirmieji tikrovės signalai. Jų pagrindu formuojasi vaizdiniai, nuo jų per sudėtingas protines operacijas pereiname prie sąvokų – mąstymo formų, kurios atspindi realaus pasaulio objektų esminius požymius.

Taigi *matematinės sąvokos* yra realaus pasaulio esminių savybių, formų ir kiekybinių santykių atspindys žmogaus sąmonėje. Tokiu būdu jau žiloje senovėje atsirado natūraliojo skaičiaus, geometrinės figūros ir kūno, figūros ploto, kūno tūrio ir kt. sąvokos.

Pirmosios matematinės sąvokos formuojasi per vaizdinius ir suvokimą, o naujos – kitaip, remiantis anksčiau suformuotomis sąvokomis. Pvz., taip suformuotos n-mačių erdvių ir vektorių sąvokos. Tad *mąstymas, kuris remiasi matematinėmis sąvokomis, pralenkia jutiminį pažinimą, jis yra aktyvaus jutiminio pažinimo duomenų perdirbimo rezultatas, grindžiamas mokslinės veiklos praktika*.

Matematinės sąvokos pasižymi aukštu *abstrakcijos* (lot. *„abstractus“* – atitrauktas) lygiu. Formuojant jas, mokiniams būtina parodyti konkrečiais pavyzdžiais, kaip šios sąvokos atsirado, kokią realios tikrovės pusę ir kaip jos atspindi.

Daiktai, reiškiniai ir santykiai tarp jų turi tam tikrų savybių – *požymių*, pagal kuriuos savo veiklos procese žmogus sutapatina ar atskiria daiktus, reiškinius ar santykius. Abstrahavimo procesas vaidina pagrindinį vaidmenį formuojant sąvokas. Tai vyksta atkreipiant dėmesį į nedidelį skaičių savybių, skiriančių sąvoka žymimą daiktą, reiškinį ar santykį nuo kitų ir abstrahuojantis nuo kitų jo savybių. Tos skiriančiosios savybės tampa *esminiais* sąvokos požymiais, o sutapatinamieji objektai ar santykiai sudaro *sąvokos apimtį*. Pvz., jei geometrines figūras nagrinėjame kaip taškų aibes, tai ši jų savybė leidžia abstrahuotis nuo tokių realių daiktų savybių, kaip spalva, medžiaga, iš kurios jie pagaminti, masė ir t. t., ir, sutapatindami visus objektus, kurie yra taškų aibės, išskiriame sąvokos „geometrinė figūra“ apimtį.

Taigi esminis požymis yra tas požymis, kurį turi visi objektai, įeinantys į sąvokos apimtį. Jei kuris nors objektas neturi tokio požymio, tai šis objektas neįeina į konkrečios sąvokos apimtį. Reikia pažymėti, kad, jei kokio nors požymio neturi visi objektai, įeinantys į kurios nors sąvokos apimtį, tai irgi yra tos sąvokos esminis požymis. Pvz., žinoma, kad kiekvieną racionalųjį skaičių galima išreikšti dviejų sveikųjų skaičių dalmeniu, tad šio požymio nebuvimas yra iracionaliojo skaičiaus esminis požymis.

Suformuoti sąvoką – reiškia atskleisti jos *turinį* tokiu mastu, kad apie bet kurį objektą būtų galima pasakyti, ar jis įeina, ar neįeina į nagrinėjamos sąvokos apimtį.

Kiekviena matematinė sąvoka įeina į atitinkamos matematikos šakos sąvokų *sistemą* (gr. *„systēma“* – junginys), yra susieta su kitomis sąvokomis atitinkamais santykiais. Čia svarbią reikšmę turi sąvokos turinys ir apimtis, *sąvokų klasės*.

Taigi kiekviena sąvoka apima *aibę* objektų arba santykių (sąvokos apimtis) ir *charakteringąją savybę*, būdingą visiems šios aibės elementams ir tik jiems (sąvokos turinys). Sąvokos turinys atskleidžiamas per *apibrėžimą*, apimtis – per *klasifikaciją*. Šiais loginiais veiksmais atskiros sąvokos sujungiamos į tarpusavyje susijusių sąvokų sistemą.

Vieną objektą (reiškinį) atskiriame nuo kito, naudodamiesi įvairiomis jų savybėmis (požymiais, ypatybėmis). Tos savybės gali būti: a) *vieninės* (*individualios*); b) *bendrosios*; c) *tuščios* (*nulinės*). Vieninės savybės skiria tam tikrą objektą nuo kitų, pvz.: 1) $\pi \approx 3{,}14$; 2) pirmojo laipsnio lygtis – tiesinė lygtis. Bendrosios savybės gali būti *skiriančiosios* ir *neskiriančiosios*. Pvz., trikampiai – daugiakampiai (neskiriančioji savybė). Skiriančioji savybė išreiškia objekto esminę savybę, jo požymį, išskiria jį iš kitų objektų aibės. Pvz., kvadratai – stačiakampiai lygiomis kraštinėmis. Tuščios savybės parodo, kad objektai, turintys tokių savybių, negali egzistuoti. Pvz., neegzistuoja bet kokio skaičiaus, nelygaus nuliui, dalmuo iš nulio. Visų šių savybių atspindėjimas žmogaus smegenyse ir pagimdo ypatingą mąstymo formą – sąvoką.

Sąvokos formavimas – laipsniškas procesas, kuriame galima išskirti keletą nuoseklių stadijų.

Yra keli *apibendrinimo* būdai. Vienas jų atliekamas išskiriant bendrus objektų požymius, atmetant tuos požymius, kuriais tie objektai skiriasi. Šio apibendrinimo rezultatas – *abstrakčios* sąvokos, kurios yra ypač reikšmingos, leidžiančios klasifikuoti, lyginti, sutapatinti ar atskirti objektus. Objektų ar reiškinių apibendrinimas pasinaudojant sąvokomis padidina mąstymo pažintinę reikšmę, nes: 1) bendresnės sąvokos leidžia mintyse apžvelgti ir nagrinėti kuo platesnę objektų aibę; 2) atmetant individualius objektų požymius, išryškiname bendrus, pastovesnius požymius, kurie siauresnėse sąvokose likdavo neatskleisti.

Kitas apibendrinimo būdas leidžia gauti vadinamąsias *konkrečias* sąvokas. Tokio apibendrinimo ypatybė – sąvokoje išskiriamos ne vien esminės objektų savybės, bet išsaugomos ir jos ypatingos bei vieninės savybės. Pvz.: trikampio plotas, trapecijos plotas.

Taigi sąvoka, skirtingai nuo pojūčių ir suvokimo, mūsų sąmonėje išreiškia tik esmines objekto savybes ir požymius. Taigi sąvoka – mąstymo forma, kurioje atspindimos esminės (skiriamosios) nagrinėjamų objektų ar santykių savybės.

Sąvokos turinys – tai jos požymių aibė, kurių kiekvienas būtinas, o visi kartu – pakankami sąvokai nustatyti. Sąvokos turinys griežtai apibrėžia jos apimtį ir atvirkščiai. Priklausomybė yra atvirkščia: didėjant turiniui, mažėja apimtis. Pvz., jei lygiagretainio sąvokos turiniui priskirsime savybę „įstrižainės tarpusavyje statmenos“, tai jos apimtis sumažės iki rombų. *Apibendrinimo* procese sąvokos apimtis platėja, turinys – siaurėja. *Specializacijos (susiaurinimo)* procese – atvirkščiai: apimtis mažėja, bet turinys platėja. Aišku, tai tinka sąvokoms, kada vienos sąvokos apimtis yra kitos sąvokos apimties poaibis. Jei pirmąją sąvoką pažymėsime *n*, kitą – *m* ir jų apimtys bus $v \subset w$, tai antroji sąvoka *m* yra *gimininė* pirmajai, o pirmoji – *rūšinė* antrajai.

Didelę reikšmę sąvokų formavimo procese turi jų žodinė ar simbolinė išraiška. Žodis, žymintis griežtai apibrėžtą sąvoką iš kurios nors mokslo srities, vadinamas *moksliniu terminu*. Kartais painiojami *homonimai* (gr. *„homōnymos“* – bendravardis) – žodžiai, turintys tą pačią išraišką, bet skirtingas reikšmes. Pvz., terminas „šaknis“ turi dvi reikšmes matematikoje, po vieną – biologijoje ir morfologijoje. Egzistuoja ir skirtingi terminai, išreiškiantys tą pačią sąvoką – *sinonimai* (lot. *„synonymum“*, gr. *„synōnymos“* – bendravardis).

Tad sąvokai būdinga: 1) ji yra žmogaus smegenų veiklos produktas; 2) ji atspindi materialųjį pasaulį; 3) pažinime ji yra apibendrinimo priemonė; 4) ji išreiškia specifinę žmogaus veiklą; 5) jos formavimasis žmogaus sąmonėje yra neatskiriamas nuo jos išraiškos kalba, užrašu ar simboliu.

2. SĄVOKŲ KLASIFIKACIJA

Sąvokos apimties išaiškinimo procesas vadinamas *klasifikacija,* t. y. objektų, sudarančių sąvokos apimtį, aibės suskaidymas į atskiras rūšis. Suskaidymas grindžiamas vienos rūšies objektų tapatumu ir skirtingų rūšių objektų skirtingumu (remiantis tam tikrais esminiais požymiais). Pvz.:

Natūralieji skaičiai

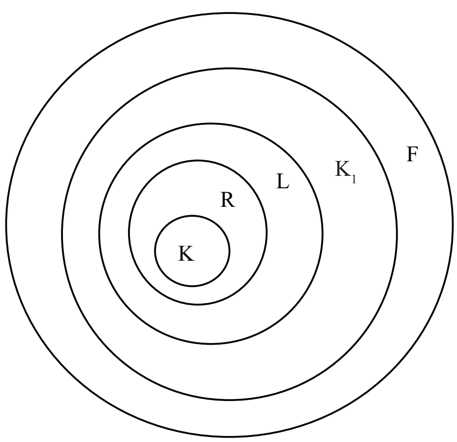
Pirminiai skaičiai   Sudėtiniai skaičiai   Vienetas

Teisinga klasifikacija bus tada, jei bus patenkintos šios sąlygos: 1) klasifikacija turi būti atlikta pagal vieną apibrėžtą požymį, kuris turi išlikti nekintantis visame klasifikacijos procese; 2) sąvokos, gautos klasifikacijos procese, turi būti tarpusavyje nepriklausomos; 3) sąvokų, gautų klasifikacijos procese, apimčių suma turi būti lygi pradinės sąvokos apimčiai; 4) klasifikacijos procese būtina pereiti prie artimiausios gimininės sąvokos.

Taigi klasifikacija – nuoseklus, daugiapakopis aibės skaidymas į klases, remiantis tam tikru pagrindu. Tokių klasifikacijų, dažnai pasitaikančių matematikoje, pavyzdžiai: kampų, trikampių, keturkampių, skaičių, funkcijų, algebrinių reiškinių ir t. t. klasifikacijos.

3. SĄVOKŲ APIBRĖŽIMAI

Mokymo tikslas – ne tik atskirų sąvokų, bet ir visos sąvokų sistemos įsisavinimas (temoje, visame mokomajame dalyke). Tam padeda ryšių tarp sąvokų atskleidimas naudojantis apibrėžimais ir klasifikacijos priemonėmis. Neperpratus sąvokų sistemos neįmanoma suprasti *dedukcinės teorijos*, kurios sudedamoji dalis ta sistema yra. Formalaus loginio apibrėžimo procesas yra vienos sąvokos pakeitimas kita, platesne, antrosios – trečia, dar platesne, ir t. t. Aišku, šis procesas negali būti begalinis. Turi būti kokios nors *pradinės sąvokos*, kurios nėra apibrėžiamos per kitas duotosios sistemos sąvokas būtent dėl to, kad jos yra pasirinktos kaip pradinės ir jų paprasčiausiai nėra kaip apibrėžti. Mokymo procese būtinai reikia sukurti tokias situacijas, kurios padėtų mokiniams atskleisti šią charakteringą matematinių sąvokų sistemos ypatybę, susijusią su dedukcinės teorijos sukūrimu. Pvz., galima paaiškinti sąvokos „kvadratas“ apibendrinimą tokiu būdu: kvadratas (K) – rombas (R) – lygiagretainis (L) – keturkampis (K_1) – figūra (F) (12 pav.).



12 pav.

Figūra – apibendrinimo riba, logikoje vadinama *kategorija* – plačiausios apimties sąvoka. Figūra – taškų aibė, plokštumos taškų poaibis. Figūros apibrėžime mes naudojamės sąvokomis „taškas“, „aibė“, kurios matematikoje yra pradinės, neapibrėžiamos.

Taigi pradinės sąvokos neapibrėžiamos per kitas šios teorijos sąvokas. Tačiau tai nereiškia, kad jos niekaip neapibrėžiamos. Matematinėje teorijoje, sukurtoje remiantis *formalia aksiomine* sistema, pradinės sąvokos netiesiogiai apibrėžiamos per *aksiomas* (gr. *axiōma* – pradinis teiginys). Aksiomomis išreiškiamos pradinių sąvokų savybės, santykiai tarp jų; visu tuo naudojamasi vystant teoriją, remiantis šių aksiomų baze. Bet joks mokyklinis matematikos kursas nei viename jo etape nėra kuriamas kaip abstrakti formalioji aksiominė sistema be jokios realios interpretacijos. Matematinė teorija mokykloje visada pateikiama kaip turinti realų turinį, konkretų modelį. Pvz., teiginys „tiesė turi ištempto siūlo pavidalą“ paaiškina nesuprantamą terminą „tiesė“ suprantamu terminu – fiziniu objektu „ištemptas siūlas“. Aišku, minėtas teiginys nėra griežtai matematinis ir negali būti atsakymas į klausimą: „Ką vadiname tiese?“, tokio klausimo ir negalima užduoti, nes sąvoka „tiesė“ – pirminė, neapibrėžiama, o klausimas, pradedamas žodžiais „ką vadiname ...“, reikalauja atsakymo – apibrėžimo.

Pirmasis pagrindinis reikalavimas, keliamas bet kokio dalyko dėstymui – reikalavimas, kad vartojamos sąvokos būtų griežtai apibrėžtos, t. y. aiškios, tikslios. Mokslinis mąstymas negali naudotis netiksliomis, nepakankamai apibrėžtomis, daugiareikšmėmis sąvokomis. Kartu būtina pabrėžti, kad vienareikšmis sąvokos apibrėžimas netrukdo sąvokoms vystytis, kisti, tobulėti.

Vartojant kurį nors specialų terminą, reiškiantį naują sąvoką, būtina užtikrinti teisingą to termino supratimą, nustatyti jo tikslią prasmę, t. y. atskleisti atitinkamos sąvokos turinį. Daugumos matematikos terminų turinys yra atskleidžiamas apibrėžimais, kuriuose naudojami pirminiai terminai – kvantoriniai žodžiai bei loginės jungtys: „kiekvienas“, „visi“, „yra“, „nėra“, „ir“, „arba“, „jei ..., tai ...“, „tada ir tik tada“ ir pan., taip pat kitomis matematinėmis sąvokomis, kurių prasmė jau anksčiau buvo suvokta.

Taigi sąvokos turinio atskleidimas vadinamas jos apibrėžimu. Apibrėžiant sąvoką naudojamasi ne visais jos esminiais požymiais (tai praktiškai būtų neįmanoma), o tik *būtinais*, vadinamais *apibrėžiančiaisiais*.

Tegul remiantis apibrėžiančiaisiais požymiais α, β, ..., σ suformuota sąvoka A , jos apimtį irgi žymėsime A. Dar pridėsime požymį ξ, ir iš šios naujos apibrėžiančiųjų požymių aibės suformuojama nauja sąvoka B su apimtimi B. Jei apimtys A ir B sutampa, tai požymis ξ yra nereikalingas sąvokai B apibrėžti, nes jį turi visi aibės A elementai ir todėl jis logiškai išplaukia iš požymių α, β, ..., σ. Taigi jei iš požymių aibės α, β, ..., σ galime išmesti kokį nors požymį γ ir po to likę požymiai leis apibrėžti sąvoką A, tai požymis γ nėra būtinas ir jo kaip apibrėžiančiojo galima atsisakyti.

Apibrėžiant matematines sąvokas paprastai naudojamasi *minimalia* nepriklausomų požymių sistema. Kiekvienas požymis joje neišsirutulioja iš likusiųjų. Bent vieno iš nepriklausomų požymių atsisakymas keičia sąvokos A apibrėžimą ir išplečia jos apimtį. Pvz., jei iš sąvokos „lygiagrečiosios tiesės“ požymių aibės išmesime požymį „būti vienoje plokštumoje“, tai praplėsime šios sąvokos apimtį, į ją įtraukdami ir prasilenkiančiąsias tieses.

Kiekviena sąvoka reiškiama žodžiu (terminu), o kartais ir *simboliu* (gr. *„symbolon“* – ženklas), vaizduojančiu šį terminą. Sąvokos formavimo procese nustatoma abipusė vienareikšmė atitiktis tarp sąvokos ir termino, taip pat tarp termino ir simbolio. Ši atitiktis neturi būti pažeidžiama svarstymų procese, žinoma, jei nėra specialių susitarimų. Termino atplėšimas nuo juo išreiškiamos sąvokos matematinės prasmės, termino matematinio turinio pakeitimas susijęs jau su matematikos žinių *formalizmu* (lot. *„formalis“* – susijęs su forma). Sąmoningas matematikos terminų ir matematinių simbolių vartojimas – svarbus matematikos žinių įsisavinimo rodiklis.

Tuščios (nulinės) sąvokos apimtis tuščia. Pvz., tai galima pasakyti apie sąvoką „didžiausias natūralusis skaičius“. Vieninės sąvokos apimtis – vienas elementas, pvz.: „mažiausias natūralusis skaičius“ (1). Kiekvienas atskiras bendrosios sąvokos elementas yra konkreti *vienetinė* sąvoka. Pagal kurį nors esminį požymį sujungę vienetines sąvokas ir abstrahavęsi nuo jų individualių, neesminių požymių, gauname bendrąją sąvoką.

Apibendrinsime. Jei aibėje A yra elementų, kurie turi tam tikrą savybę P, ir elementų, neturinčių šios savybės, tai savybė P apibrėžia aibės A suskaidymą į dvi klases (poaibius):

$$\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{A} \wedge \mathrm{P}(x)\} \text{ ir } \overline{\mathrm{B}} = \{x \in \mathrm{A} \wedge \overline{\mathrm{P}}(x)\};$$

čia $\mathrm{P}(x)$ reiškia, kad elementas x turi savybę P, o $\overline{\mathrm{P}}(x)$ – kad elementas x šios savybės neturi. Šis suskaidymas tenkina visas teisingo aibės suskaidymo į klases sąlygas: kiekviena klasė nėra tuščia ($\mathrm{B} \neq \varnothing$ ir $\overline{\mathrm{B}} \neq \varnothing$), šios klasės nesikerta ($\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{B}} = \varnothing$) ir išsemia duotąją aibę A ($\mathrm{B} \cup \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{A}$). Naudodamiesi savybe P mes ir apibrėžėme aibę B kaip aibės A poaibį (čia A – gimininė sąvoka, P – rūšinis skirtumas (požymis)).

4. APIBRĖŽIMŲ RŪŠYS

Matematikos moksle naudojamos įvairios apibrėžimų rūšys. Aptarsime jas.

Kadangi sąvoka – mąstymo forma, tai būtina tiksliai skirti *formalų loginį* sąvokos apibrėžimą ir jos *formavimą* mokinių sąmonėje. Daugeliu atvejų formaliai neįmanoma išanalizuoti visų esminių sąvokos požymių (t. y. nurodyti sąvokos turinio) ar išvardyti visų elementų, įeinančių į sąvokos apimtį, tačiau mokymo procese taip daroma. Pvz., pradinių klasių matematikos vadovėliuose pasitaiko piešinių, kuriuose pavaizduota atitinkamai keletas tiesių atkarpų ir keletas kreivių lankų, o po tais piešiniais užrašyta: „Tai – tiesės“, „Tai – kreivės“. Taip lyg ir pateikiamas vaizdus „tiesumo“ ir „kreivumo“ požymių „išskaičiavimas“. Aišku, logine prasme tokie „apibrėžimai“ – netobuli, tačiau vaizdine prasme – labai įtikinantys. Penktoje klasėje aiškinama, kad „natūralieji skaičiai – tai skaičiai 1, 2, 3, ...“. Aišku, kad taip apibrėžti natūraliuosius skaičius logiškai irgi nėra teisinga, tačiau mokymo pradžioje to pakanka. Pateiktieji pavyzdžiai – ne apibrėžimai, o tik *paaiškinantieji aprašymai*, logikoje vadinami *ostensiniais* apibrėžimais.

Dažniausiai pasitaiko tokie loginiai apibrėžimai, kuriuose pateikiami ne visi charakteringieji sąvokos požymiai, o tik tie, kurie atskiria naują sąvoką nuo jau anksčiau apibrėžtų. Šiais atvejais paprastai apibrėžimams formuluoti jau yra tam tikra bazė. Aptarsime kitus mokykloje vartojamus apibrėžimus.

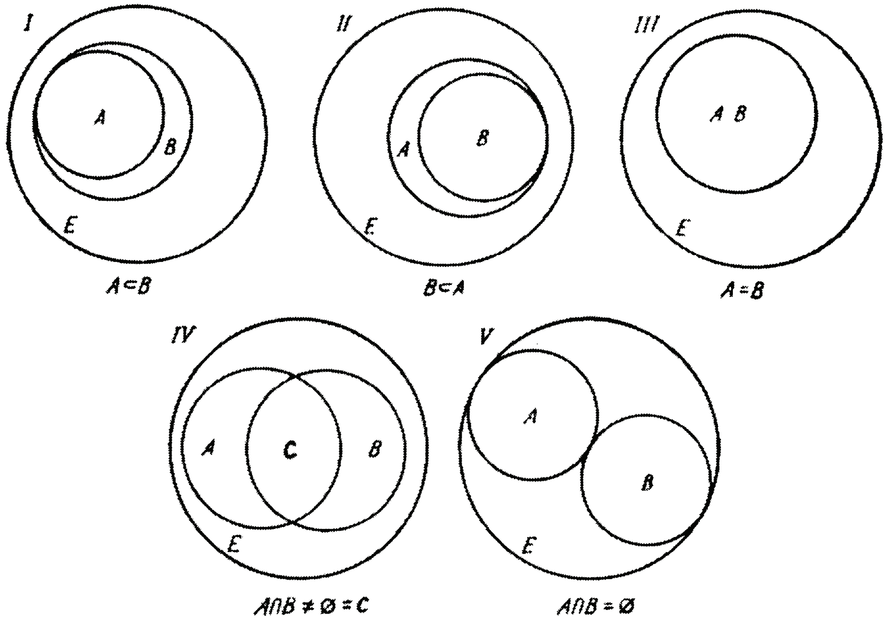
1. Naujas objektas apibrėžiamas kaip jau žinomas, tačiau turintis kai kurių specifinių savybių, arba kaip objektas – santykis tarp jau žinomų objektų. Apibrėžime aprašomos ypatingos savybės (ar santykiai), kuriomis (kuriais) pasižymi apibrėžiamasis objektas. Todėl tokie apibrėžimai vadinami *deskripciniais* (aprašomaisiais, lot. *„descriptivus“*). Pvz.: „Stačioji prizmė, kurios pagrindas yra lygiagretainis, vadinama stačiuoju gretasieniu“. Aišku, čia panaudojami modeliai, piešiniai, aplinkoje esantys daiktai, kurie iliustruoja šį apibrėžimą. Tačiau kartai vaizdumo panaudoti negalima, pvz.: „Kvadratine šaknimi iš skaičiaus a vadiname skaičių, kurį pakėlę kvadratu gausime skaičių a“. Čia jau teks remtis tik skaitiniais pavyzdžiais.
2. Pasinaudojant jau žinomomis operacijomis, kurias su žinomais objektais galima atlikti tam tikra tvarka, mokiniams padedama suvokti kitus naujus objektus. Tokios rūšies apibrėžimai vadinami *konstrukciniais* (lot. *„constructio“* – sustatymas, sandara) arba *genetiniais*. Pvz.: „Plokštumoje α nubrėžkime lygiagretainį ABCD. Iš visų jo viršūnių išveskime lygiagrečias tieses, negulinčias plokštumoje α. Tiesėse vienoje pusėje nuo plokštumos α atidėkime atkarpas AE = BF = CG = DH. Šių keturių atkarpų galai yra briaunainio, kurio visos sienos lygiagretainiai, viršūnės. Tokį briaunainį vadiname gretasieniu“. Panašus ir kitas apibrėžimas: „Skaičiaus a laipsniu su natūraliuoju rodikliu $n > 1$ vadiname sandaugą n dauginamųjų, kurių kiekvienas lygus a“. Abiem atvejais mokiniai su jiems žinomais matematiniais objektais atlikinėjo jiems žinomas operacijas. Taigi genetiniuose apibrėžimuose iš tiesų nurodomas apibrėžiamojo objekto sukūrimo procesas. Taip mokykloje apibrėžiamas ir apskritimas, sfera, ritinys, kūgis. Genetiniais apibrėžimais dažnai naudojamasi ir mokykloje nagrinėjant funkcijas, kada nustatoma taisyklė (atitikties dėsnis), pagal kurią kiekvienam vienos aibės elementui nustatomas jį atitinkantis kitos (ar tos pačios) aibės elementas. Tokie apibrėžimai mokykloje naudojami kiekvieną kartą plečiant skaičiaus sąvoką, įvedant aritmetinius veiksmus praplėstose skaičių aibėse, plečiant laipsnio sąvoką ir t. t. Kadangi panašiais atvejais genetiniai apibrėžimai yra pagrįsti kai kuriais susitarimais, tai juos paprastai vadiname *apibrėžimais – sąlyginiais susitarimais*. Dar viena apibrėžimų rūšis – *indukciniai* – yra tokia genetinių apibrėžimų atmaina, kai objektai (dažniausiai skaičių, taškų ir kt. aibės) apibrėžiami formule, pagal kurią apskaičiuojami atskiri tos aibės elementai. Taip matematikoje formuluojami nagrinėjamų kreivių apibrėžimai, pvz., parabolės – $y = x^2$, aritmetinės bei geometrinės progresijų bendrojo nario ir n narių sumos apibrėžimai.

3. Formuluojant loginius apibrėžimus, juose išskaičiuojami ne visi charakteringieji sąvokos požymiai, o tik tie, kurie skiria naują sąvoką nuo jau žinomų. Paprasčiausiu atveju tokių požymių yra tik 2: „Plokščioji (I požymis) figūra vadinama iškiliąja, jeigu jai priklauso atkarpa, jungianti bet kuriuos du jos taškus (II požymis)“. Jei ir iškiliosios figūros (A), ir daugiakampio (B) sąvokos jau suformuotos, galima pateikti ir tokį apibrėžimą: „Iškiliuoju daugiakampiu vadinamas daugiakampis, kuris yra iškilioji figūra“. Bendru atveju toks apibrėžimas skambėtų: „B yra A, turintis savybę α“. Sąvoka A vadinama *gimine* (*gimininė sąvoka*) sąvokos B atžvilgiu, o sąvoka B – *rūšimi* arba *rūšinė sąvoka* sąvokos A atžvilgiu, pats požymis α vadinamas *rūšiniu skirtumu*. Tokios rūšies apibrėžimai vadinami *apibrėžimais gimine ir rūšiniu skirtumu.* Rūšinis požymis α visada yra neesminis gimininės sąvokos A požymis, bet yra esminis apibrėžiamajai, rūšinei sąvokai B. Tad apibrėžimas gimine ir rūšiniu skirtumu – tai nurodymas bendresnės sąvokos, kurios atskirą atvejį sudaro apibrėžiamoji sąvoka, ir kurio nors požymio, skiriančio naują sąvoką nuo visų kitų sąvokų, įeinančių į tą bendresnę sąvoką. Pvz., taip apibrėžiami rombas, kvadratas, trapecija. Kitas apibrėžimų formulavimo būdas – charakteringųjų sąvokos požymių išskaičiavimas. Taip apibrėžiamos lygiagrečiosios tiesės, plokštumos. Mokymo praktikoje prieš įvedant naują sąvoką ir ją apibrėžiant paprastai pateikiami konkretūs pavyzdžiai objektų, priklausančių gimininei sąvokai, turinčių rūšinį požymį ir neturinčių jo. Pvz., prieš apibrėžiant sąvoką „sudėtinis skaičius“, pateikiami pavyzdžiai natūraliųjų skaičių, turinčių kelis daliklius (6, 10, 16, 18 ir t. t.), ir pirminių skaičių (3, 5, 7, 11 ir t. t.). Apibrėžimai gimine ir rūšiniu skirtumu gali būti deskripciniai ir genetiniai. Pirmuoju atveju tai bus aukščiau pateiktas iškiliojo daugiakampio apibrėžimas, antruoju – taip pat aukščiau pateiktas gretasienio apibrėžimas.

Tegul turime sąvoką E, iš kurios pagal skirtingus rūšinius požymius α ir β išskirtos dvi naujos sąvokos A ir B. Aptarsime šių sąvokų ryšį. 13 pav. pavaizduoti visi 5 galimi jų santykiai.

Panagrinėsime visus šiuos atvejus.

I. Tegu E – keturkampiai, požymis β – priešingų kraštinių lygiagretumas, požymis α – visų kraštinių lygumas. Aišku, kad aibė B bus lygiagretainiai, o aibė A – rombai. Gausime apibrėžimą: „Rombas – lygiagretainis, kurio dvi gretimos kraštinės lygios“. Beje, kartais apibrėžiama nebūtinai per artimiausią giminę. Pvz., trapecija apibrėžiama artimiausia gimine kaip „keturkampis, turintis dvi lygiagrečias kraštines“. Tačiau tai netaikoma lygiagretainio apibrėžime, kad labiau pabrėžtume skirtumą tarp lygiagretainių ir trapecijų, nes tada lygiagretainį turėtume apibrėžti taip: „Jeigu keturkampyje su dviem lygiagrečiomis kraštinėmis ir kitos dvi kraštinės lygiagrečios, tai toks keturkampis vadinamas lygiagretainiu“. Toks apibrėžimas, nors ir teisingas, tačiau labai griozdiškas.



13 pav.

II. Šis atvejis ir pirmasis yra analogiški.

III. Šiuo atveju susiduriame su lygiaverčiais tos pačios sąvokos apibrėžimais. Vieną jų priimame ir vartojame, antrojo atsisakome. Pvz., apibrėžus lygiakraštį trikampį (A) kaip trikampį, kurio visos kraštinės lygios (α), galima suformuluoti ir lygiakampio trikampio (B) apibrėžimą – jo visi kampai bus lygūs (β). Sąvokos A ir B bus tapačios, bet tradiciškai pasirenkamas pirmasis apibrėžimas, tačiau, ypač sprendžiant uždavinius ar įrodinėjant teoremas, naudojamasi ir antruoju apibrėžimu.

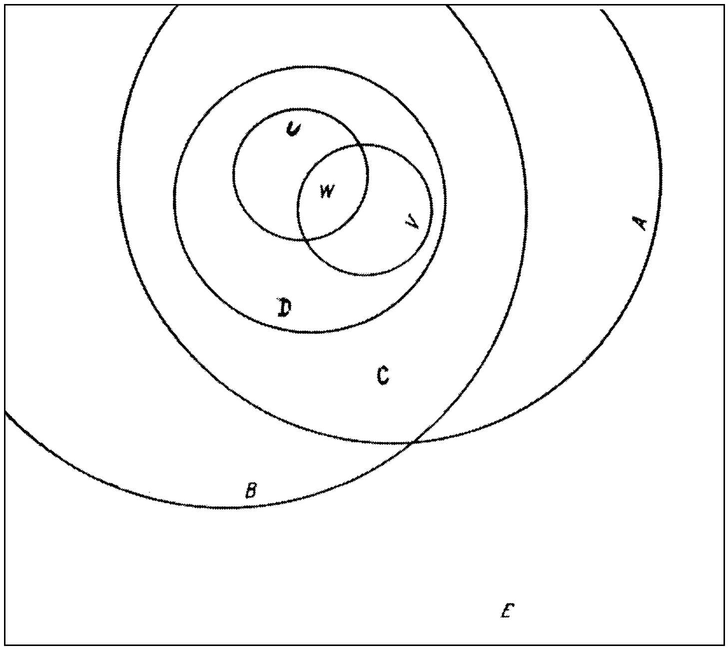
IV. Jei E – lygiagretainiai, α – stataus kampo buvimas, β – gretimų kraštinių lygumas, tai A – stačiakampiai, B – rombai, C – kvadratai. Turime du lygiaverčius kvadrato apibrėžimus: „Kvadratas – tai stačiakampis, kurio dvi gretimos kraštinės lygios“ ir „Kvadratas – tai rombas, kurio kampai statūs“.

V. Čia gali būti: E – keturkampiai, A – lygiagretainiai, B – trapecijos.

Apibrėžiant sąvokas per artimiausią giminę ir rūšinį skirtumą, susiduriame ir su sąvokų susiaurinimu bei apibendrinimu. Tegu E – daugiakampiai, A – iškilieji daugiakampiai, B – keturkampiai, D – lygiagretainiai, U – stačiakampiai, V – rombai, W – kvadratai. Tada turėsime:

$$E \supset B \supset C \supset D \supset U \supset W.$$

Tai sąvokos siaurinimas. Einant atvirkščia tvarka, turėsime sąvokos apibendrinimą. Šie procesai yra vienas kitam atvirkštiniai (14 pav.).



14 pav.

Beje, su sąvokos siaurinimo procesu yra susijęs ir jos skirstymo (klasifikacijos) procesas. Jei norėtume sąvoką A (natūralieji skaičiai) suskirstyti pagal neesminius požymius: α (turėti daugiau kaip du daliklius), β (turėti tik du daliklius) ir γ (turėti tik vieną daliklį), o esminis požymis – natūraliojo skaičiaus daliklių skaičius būtų skirstymo pagrindas, tai gautume jau aukščiau minėtus tris poklasius – sudėtinius bei pirminius skaičius ir skaičių 1.

Tegul sąvoka A – trikampiai, nepriklausomų neesminių požymių aibė: α – turėti tik smailiuosius kampus, β – turėti statų kampą, γ – turėti buką kampą, esminis požymis – kampų didumas, tada trikampiai bus suskirstyti į smailiuosius, stačiuosius ir bukuosius. Panašiai pagal kraštinių ilgius trikampiai suskirstomi į įvairiakraščius, lygiašonius ir lygiakraščius.

4. Žemesnėse klasėse, kaip jau minėta, kur tikslių apibrėžimų dėl nepakankamo mokinių matematinio išprusimo ir jų amžiaus ypatybių suformuluoti dar neįmanoma, pateikiami ostensiniai apibrėžimai. Pvz.: „$2 > 4$, $3 + 2 > 1$, $5 < 8$ – tai nelygybės“ ir pan.
5. Vyresniosiose klasėse taikomi ir apibrėžimai *per abstrakciją*. Pvz.: „Natūralusis skaičius – ekvivalenčių baigtinių aibių klasės charakteristika“.

5. SĄVOKŲ MOKYMO METODIKA

5.1. Bendros pastabos

Apibrėžimas yra vienas iš esminių būdų naujoms sąvokoms įvesti. Apibrėžimas – tai tokia formuluotė, kuri apibrėžiamąją sąvoką įveda į jau žinomų mokiniams duotosios matematikos šakos sąvokų sistemą.

Pirmųjų kiekvieno mokslinio dalyko sąvokų, kaip jau minėta, negalima apibrėžti, tad jas reikia paaiškinti praktiškai: tiesė – ištempta virvutė, plokštuma – stalo, rašomosios lentos paviršius ir pan. Santykiai tarp pirminių, pagrindinių sąvokų nustatomi aksiomomis. Jos pagrindines sąvokas netiesiogiai apibrėžia tokiu laipsniu, kad jas vėliau galima vartoti apibrėžimuose.

5.2. Sąvokų įvedimo mokymo procese būdai

5.2.1. Bendros pastabos

Sąvokų vaidmuo mokymo procese yra ypač svarbus. Nuo sąvokų išmokimo kokybės tiesiogiai priklauso matematikos išmokimo kokybė: gilumas, išsamumas, pagrįstumas, žinių, mokėjimų ir įgūdžių tvirtumas. Yra nepaprastai svarbu, kad mokiniai tvirtai įsisavintų matematines sąvokas, suvoktų jų prasmę, turinį, apimtį. Tai užtikrina teisingą sąvokų vartojimą praktikoje konkrečiais atvejais. Ypač kruopščiai reikia mokytis suprasti sąvokas, vartojamas teoremų įrodymuose, taisyklių pagrindimuose.

Spragos įsimenant sąvokas kenkia žinių tvirtumui, gimdo formalizmą.

Taigi viena pagrindinių matematikos didaktikos taisyklių yra: **kiekvieną matematinę sąvoką mokinys turi įsisavinti tobulai.**

Jokiu būdu negalima teikti mokiniams klaidingų ar iškreiptų sąvokų: tai anksčiau ar vėliau taps stabdžiu mokantis, tų sąvokų teks atsisakyti, jas pakeisti teisingomis. Jei vaikų protinio išsivystymo lygis dar neleidžia pateikti sąvokos taip, kaip tai priimta moksle, tai reikia sąvoką pateikti taip, kad jie galėtų ją suprasti, o vėliau – tobulinti šį supratimą, sąvoką suformuluojant moksliniu lygiu.

Ugdant teisingą ir efektyvų sąvokinį vaikų mąstymą, būtina, kad šis mąstymas remtųsi jutiminiu suvokimu, pojūčiais, vaizdiniais. O tam tikslui būtina pasitelkti vaizdines priemones: konkrečius daiktus, modelius, vaizdus, remtis vaikų gyvenimiškuoju patyrimu bei anksčiau įgytomis matematikos žiniomis. Tad supažindinant mokinius su nauja sąvoka, reikia pradėti nuo „gyvojo“ suvokimo, nuo konkrečių situacijų, pasitelkti jų turimus vaizdinius; reikia pasiekti, kad mokiniai išskirtų esmines nagrinėjamo objekto savybes, atmestų neesmines ir taip įvaldytų naują sąvoką, pereidami prie abstraktaus mąstymo. Su kiekviena nauja sąvoka įvedamas žodis, žymintis ją – terminas. Šį terminą vaikai turi įsiminti, suvokti jo turinį ir apimtį; jis palaipsniui turi įeiti į aktyvųjį mokinio žodyną, tapti jo antrosios signalinės sistemos signalu, sukeliančiu teisingą smegenų reakciją. Kartais sąvoka žymima ir sąlyginiu simboliu: $\perp$, Δ, $\parallel$ ir pan. Tas simbolis irgi turi tapti antrosios signalinės sistemos signalu.

Sąvokų formavimo procesas yra sudėtingas. Jame taikoma elementari *analizė* (gr. *„analysis“* – skaidymas) – mąstomojo objekto suskaidymas į atskirus elementus, stengiantis išskirti tuos jo požymius, kurie yra esminiai. Analizė palydima elementaria *sinteze* (gr. *„synthesis“* – sujungimas, sudarymas, derinimas) – į visumą sujungiami esminiai sąvokos požymiai, sudaroma klasė objektų, kurie žymimi nauja sąvoka. Taigi formuojant sąvoką lemiamą vaidmenį vaidina *abstrahavimas* – mintinis išskyrimas to, kas esminga ir atsisakymas kitų, neesminių požymių.

Matematinių sąvokų vaidmuo mokantis matematikos yra įvairus: vienos įtraukiamos į logines operacijas – įrodymus, taisyklių, algoritmų pagrindimus (pvz., trikampis, lygiagretainis, logaritmas), kitos į tas operacijas neįtraukiamos ir vaidina pagalbinį vaidmenį (pvz., aksioma, lema), dar kitos įvairiuose mokymo etapuose vaidina skirtingą vaidmenį (pvz., trikampis pradiniame mokymo etape yra vartojamas kaip skaičiuojamoji medžiaga, skaičiavimo objektas, o mokantis geometrijos tampa savarankišku nagrinėjimo objektu). Sąvokų įsisavinimo sunkumai irgi yra skirtingi. Jie priklauso nuo sąvokos esmės, jos reikšmės mokantis dalyko, nuo moksleivių amžiaus tarpsnių. Tad ir sąvokų įvedimo keliai yra įvairūs. Pagrindiniai yra tokie: a) apibrėžimas abstrahuojant (kartais palydint aprašomaisiais paaiškinimais); b) netiesioginis apibrėžimas aksiomomis; c) apibrėžimas artimiausia gimine ir rūšiniu skirtumu ar išskaičiuojant esminius požymius.

5.2.2. Apibrėžimas abstrahuojant

Įvedant gretasienio, ritinio, rutulio ir apskritai bet kokio geometrinio kūno sąvokas, demonstruojami įvairaus dydžio, pagaminti iš įvairių medžiagų, įvairių spalvų objektai ir, kalbantis su mokiniais, išsiaiškinama, kad geometrijoje abstrahuojamasi nuo neesminių savybių, išskiriant esmines: formą, matmenis, tarpusavio išsidėstymą. Taip ateinama prie sąvokos aprašomojo apibrėžimo: „Geometrinis kūnas – erdvės dalis, apribota iš visų pusių paviršiais“. Tokios sąvokos formavimo procesas – sudėtingas pedagoginis ir psichologinis procesas, labai priklausantis nuo mokytojo meistriškumo: nuo jo priklauso, kaip praeis pirmasis „susitikimas“ su nauja sąvoka, ar teisingai mokiniai ją susiformuos, ar liks mokinių sąmonėje ši sąvoka ilgam.

Analogiškai įvedamos paviršiaus, linijos, taško, geometrinės figūros, tiesės, plokštumos sąvokos.

5.2.3. Aiškinantieji aprašymai

Aukščiau aptarėme geometrinio kūno aiškinantįjį aprašymą. Geometrinis kūnas – pirmoji sąvoka, kuri įvedama geometrijos kurse. Jo negalima apibrėžti kitomis geometrinėmis sąvokomis, nes tokių sąvokų mokiniai dar nežino. Aiškinamasis aprašymas remiasi tomis sąvokomis ir vaizdiniais, kuriuos mokiniai turi įgiję gyvenimo patirtimi: erdvė, dalis, apribojimas, pusė ir kt.

Sakiniai: „Paviršius – kūno riba“, „Paviršius – bendra gretimų erdvės sričių dalis“, „Linija – dviejų paviršiaus sričių bendroji dalis“, „Taškas yra bendra dviejų gretimų tos pačios linijos dalių dalis“ yra aiškinantieji aprašymai.

Dažnai tokie aprašymai naudojami ir aritmetikoje: „Natūralusis skaičius yra arba vienetas, arba keleto vienetų rinkinys“, „Trupmena – vieneto dalis arba keleto jo vienodų dalių rinkinys“ ir pan.

Kai kurie mokytojai painioja aiškinančiuosius aprašymus ir loginius apibrėžimus, pirmuosius laikydami pastaraisiais. Aiškinantieji aprašymai nėra matematiniai teiginiai, jie nenaudojami kaip argumentai įrodymuose, kaip tikrieji loginiai apibrėžimai. Todėl nereikia versti mokinių išmokti tuos aprašymus, pakanka, kad jie mokėtų atpasakoti savais žodžiais. O apibrėžimus mokiniai turi mokėti formuluoti tiksliai.

Kaip išmokyti atskirti aprašymus nuo apibrėžimų? Apibrėžimuose naudojamos tik anksčiau vienu ar kitu būdu įvestos sąvokos, o aprašymuose, greta nagrinėjamo kurso sąvokų, plačiai naudojamasi mokinių gyvenimo patirtimi, vaizdiniais ir sąvokomis, sukauptomis šia patirtimi.

Kartais ir vadovėlių autoriai painioja apibrėžimus ir aiškinančiuosius aprašymus.

Aiškinantieji aprašymai yra kelių rūšių:

1. *Primityviausi* (lot. *„primitivus“* – pirmykštis, ankstyvas), nurodantys praktinę sąvokos reikšmę; jie kartais vadinami *tiksliniais* (pvz.: „Natūralieji skaičiai reikalingi daiktų skaičiavimui“).
2. *Priežastiniai,* arba *kauzaliniai* (lot. *„causalis“* – priežastinis) – juose nurodomos kai kurios galimos sąvokos atsiradimo priežastys (pvz.: „Natūralieji skaičiai – daiktų skaičiavimo rezultatas“, „Linija – judančio taško pėdsakas“).
3. *Nurodantieji,* kuo gali būti laikoma sąvoka (pvz.: „Taškas – linijos riba“, „Linija – paviršiaus riba“); dažnai tokie aprašymai atskleidžia neesminius požymius: taškas nebūtinai yra linijos gale, bet gali būti ir jos viduje, ir šalia jos.
4. *Sisteminiai* (gr. *„systēma“*– sandara, junginys) – patys vertingiausi, atskleidžiantys esmines sąvokų savybes (pvz.; „Kampas – vieno spindulio polinkio į kitą spindulį matas“).

Įvedant naują sąvoką, galima ir pageidautina pateikti ne vieną, o keletą jos aprašymų. Kiekvienas jų atskleis dalį sąvokos esmės, o keli esmę atskleis išsamiau. Net prieš formuluojant loginį apibrėžimą naudotini ir aiškinantieji aprašymai.

5.2.4. Loginiai apibrėžimai

Jie įvedami, ypač žemesnėse klasėse, *euristinio* (gr. *„heuriskō“* – randu) *pokalbio* metu, plačiai naudojantis mokinių žiniomis, gyvenimo patyrimu. Idealus euristinio pokalbio rezultatas – pačių mokinių suformuluotas apibrėžimas. Pedagogine prasme tai nepaprastai naudinga: sužadinamas mokinių kūrybinis aktyvumas, naujas terminas įtraukiamas į aktyvųjį mokinių žodyną, atskleidžiamas sąvokos turinys, lengviau įsimenamas apibrėžimo formulavimas, realizuojamas mokymo sąmoningumo principas.

Tačiau kartais sąvokos įvedimą galima pradėti iš karto pateikiant mokiniams apibrėžimo formuluotę. Taip daroma tada, kai apibrėžimas mokinių gali būti suvoktas be išankstinio jų parengimo (pvz., taip įvedamos stačiakampio ir kvadrato sąvokos geometrijos kurse, nes bendras vienos ir kitos figūros vaizdinys mokinių sąmonėje formuojasi jau mokantis pradinės matematikos ir per gyvenimišką praktiką).

Apibrėžimas – matematinis teiginys. Kiekvienas mokinys turi jį įsiminti ir lengvai atgaminti, t. y. jis turi tvirtai įeiti į mokinio žinių sistemą, o tai pasiekiama daugkartinio kartojimo, pratybų keliu.

Reikia atsiminti, kad yra tokių matematinių sąvokų, kurios formuojamos ilgą laiką, nuolat jas tikslinant: skaičius, funkcija, lygtis. Šios sąvokos formuojamos nuolat prie jų grįžtant beveik per visą mokymosi mokykloje laiką. Yra sąvokų, kurios formuojamos keletą pamokų: funkcijos išvestinė, iracionalusis skaičius.

5.2.5. Netiesioginis apibrėžimas aksiomomis

Pirminės (pagrindinės) sąvokos suvokiamos abstrahuojantis nuo konkrečių situacijų (pvz., tiesė, plokštuma). Tačiau taip suformuotos sąvokos dar netinka taikyti įrodymuose. Todėl būtina nustatyti jų sąryšį pasinaudojant aksiomomis. Pvz.: „Per du taškus galima nubrėžti tiesę ir tiktai vieną“.

5.3. Mokinių supažindinimas su sąvokų klasifikavimu

Apibrėžiant sąvokas esminį vaidmenį vaidina jų turinys, o klasifikuojant – apimtis. Mokiniai turi suvokti, kad klasifikacija – objektų aibės, sudarančios sąvokos apimtį, dalijimas į rūšis, remiantis vienos rūšies objektų tapatumu ir jų esminių požymių skirtingumu nuo kitų rūšių objektų esminių požymių. Pirmą kartą mokiniai atlieka klasifikaciją pradinėse klasėse, suskirstydami kampus: smailieji, statieji, bukieji ir ištiestiniai. Vėliau, vidurinėse klasėse, mokiniai skirsto trikampius pagal kampų didumą ir kraštinių lygumą, dar vėliau klasifikuoja keturkampius .

Supažindinimas su matematinėmis klasifikacijomis turi bendrąjį didaktinį charakterį: atskleidžiama bendroji klasifikacijos esmė, nes klasifikacijos taikomos įvairiose mokslo ir praktikos srityse. Kartu matematinės klasifikacijos pagilina mokinių matematikos žinias, padeda geriau atskleisti sąvokų apimtį, tiksliau formuluoti jų apibrėžimus. Ypač jos vertingos kartojant kursą.

5.4. Matematinių sąvokų įvedimas mokykloje

Sąvokos turinio atskleidimo procesas – jos požymių išvardijimas. Būtini ir pakankami sąvokos požymiai, išvardyti rišliu sakiniu (žodiniu ar rašytiniu, simboliniu), yra sąvokos apibrėžimas. Apibrėžimas atskleidžia sąvokos turinį.

Apibrėžimai neįrodinėjami, jie – sąlyginiai susitarimai, pasirenkami protingai, remiantis vienos ar kitos sąvokos realiomis savybėmis ar tam tikrais reikalavimais (įvedant naują sąvoką). Dalis matematinių sąvokų – pirminių – neapibrėžiamos (jos netiesiogiai apibrėžiamos aksiomomis).

Žymus prancūzų matematikas Morisas Renė Frešė (*Fréchet*, 1878–1973) reikalavo nepateikti jokių apibrėžimų, nenurodžius jų kilmės, taip to, kam jie reikalingi ir kaip taikomi. Vienas iš naujų sąvokų įvedimo būdų – *konkretusis indukcinis*. Štai kaip juo remiantis gali būti supažindinama su sąvoka „lygiagrečiosios tiesės“ (11 lentelė [127, p. 73–74]).

Įvedant sąvokas, kurios yra organiškai susiję su mokiniams jau žinomomis sąvokomis, naudojamas *abstraktusis dedukcinis* būdas.

Pvz., įvedant kvadratinės lygties sąvoką, gali būti elgiamasi taip.

1. Pateikiamas naujos sąvokos apibrėžimas: „Lygtis pavidalo $ax^2 + bx + c = 0$, kur $a \neq 0$, vadinama kvadratine lygtimi“. Terminas motyvuojamas tuo, kad lygtyje yra kintamojo kvadratas.
2. Išnagrinėjami daliniai atvejai ir pateikiama klasifikacija:

Pilnoji kvadratinė lygtis

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Suprastinta kvadratinė lygtis

$$x^2 + px + q = 0$$

Nepilnosios kvadratinės lygtys

$$ax^2 + c = 0 \quad ax^2 + bx = 0 \quad ax^2 = 0$$

Čia būtinas kontrpavyzdys: ar lygtis $bx + c = 0$ yra kvadratinė?

3. Įvestoji sąvoka iliustruojama konkrečiais pavyzdžiais.
4. Pateikiami konkretūs pavyzdžiai, kuriuose naujoji sąvoka taikoma (pvz.: fizikos formulę $s = \frac{qt^2}{2}$ galima laikyti kvadratine lygtimi $qt^2 - 2s = 0$), šios lygtys panaudojamos sprendžiant tekstinius uždavinius.

11 lentelė

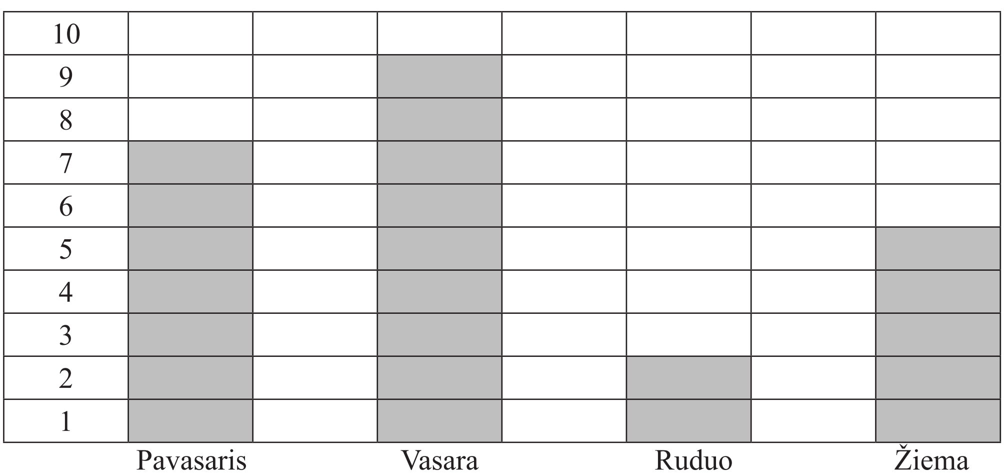
Mokinių supažindinimo su lygiagrečiosiomis tiesėmis eiga

Mokymo proceso etapai	*Psichologinės sąvokos formavimo pakopos*	*Konkreti sąvokos išraiška (žodžiais, simboliais, modeliais)*
I žingsnis. Ryškių praktinių pavyzdžių, rodančių šios sąvokos įvedimo tikslingumą, ieškojimas	Pojūtis ir suvokimas	Geležinkelio bėgiai (tiesiose geležinkelio atkarpose), durų rėmai ir t. t.
II žingsnis. Įvairių esminių ir neesminių nagrinėjamos sąvokos požymių išaiškinimas (mokiniai), sąvoką žyminčio termino įvedimas (mokytojas) Ypatingų atvejų (jei jų yra) nagrinėjimas Termino įvedimas ir jo motyvacija (mokytojas)	Perėjimas nuo suvokimo prie vaizdinio	1) Tiesės yra horizontalios (neesminis pož.) 2) Tiesės vienodai nutolusios viena nuo kitos (esminis pož.) 3) Tiesės neturi bendrų taškų (esminis pož.) 4) Tiesės pratęsiamos į abi puses iki begalybės (neesminis pož.) Pažymima, kad sutampančios tiesės yra vienodai nutolusios viena nuo kitos (atstumas lygus nuliui) Lygiagrečios tiesės (lygia greta)
III žingsnis. Esminių pasirinktosios sąvokos savybių atrinkimas ir šios sąvokos apibrėžimo formulavimas (mokiniai, bandymų keliu) Tikslus apibrėžimas (mokytojas), jo pakartojimas (mokiniai)	Perėjimas nuo vaizdinio prie sąvokos	1) Lygiagrečios tiesės – pora tiesių, kurios neturi bendrų taškų (nepilnas apibrėžimas, kontrpavyzdys: prasilenkiančios ar sutampančios tiesės) 2) Dvi tiesės *a* ir *b*, esančios toje pačioje plokštumoje, vadinamos lygiagretėmis, jei jos neturi bendrų taškų arba sutampa

IV žingsnis. Sąvokos iliustracija konkrečiais pavyzdžiais Simbolinis žymėjimas	Sąvokos formavimas	1) Kopėčių skersiniai 2) Sienos ir lubų bei tos pačios sienos ir grindų susikirtimo tiesės 3) Kubo priešingos briaunos $a \parallel b$ arba $AB \parallel CD$
V žingsnis. Kiti galimi sąvokos apibrėžimai	Sąvokos įsisavinimas	1) Lygiagrečios tiesės yra tokios, kurios: a) yra vienoje plokštumoje; b) sutampa ar neturi bendrų taškų 2) Lygiagrečios tiesės – tiesės, esančios vienoje plokštumoje ir negalinčios turėti vieno bendro taško

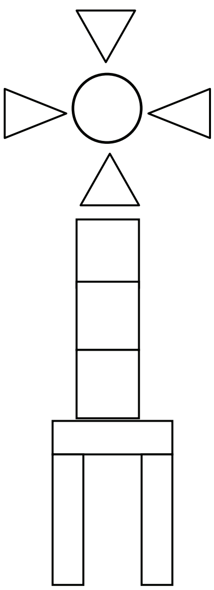
Įsisavindami naują matematinę sąvoką, mokiniai mokosi ir taikyti šią sąvoką savo matematinės veiklos procese, surasti ją teoremų įrodymuose ar uždavinių sprendimuose tais atvejais, kai ta sąvoka ten slypi. Ypač tai dažnai praktikuojama geometrijoje, sudėtingesniuose ar neįprastai išdėstytuose brėžiniuose.

Pradinėse klasėse, ypač ten, kur naudojamasi ostensiniais apibrėžimais, elgiamasi dar paprasčiau. Rokiškio Romuvos gimnazijos I klasėje vyresnioji mokytoja Ramutė Repšienė diagramos (gr. *„diagramma“* – brėžinys, vaizdas) sąvoką įvedė tokiu būdu. Iškabino tinklelį (15 pav.), o po to kiekvienas mokinys įklijavo į atitinkamą stulpelį atitinkamos spalvos stačiakampį (pagal tai, kokiu metų laiku kiekvienas iš jų gimė) ir gavo diagramą (mokytoja taip ir pasakė: „Gavome diagramą“).



15 pav.

Toliau vaikai atsakė į klausimus:
- Kokiu metų laiku gimė daugiausia mūsų klasės mokinių?
- Kiek jų gimė vasarą?
- Kokiu metų laiku gimė mažiausia mūsų klasės mokinių?
- Kiek jų gimė rudenį?
- Kiek gimė pavasarį?
- Kiek gimė žiemą?
- Keliais vaikais yra daugiau gimę vasarą negu pavasarį?
- Keliais vaikais gimė mažiau rudenį negu pavasarį?



16 pav.

Po pedagoginės pertraukėlės mokytoja vaikams padalijo vokus su geometrinių figūrų rinkiniais (trikampių, kvadratų, skritulių, stačiakampių) ir liepė vaikams iš tų figūrų sukonstruoti kokią nors sudėtingesnę figūrą: automobilį, namuką, gyvūną, gėlę ir t. t. Toliau vaikams padalijo po aukščiau pateiktos formos lentelę, tik vietoje žodžių: „pavasaris“, „vasara“, „ruduo“, „žiema“ buvo figūrų piešiniai: Δ, ○, □, ▭ ir liepė suskaičiuoti panaudotas geometrines figūras, bei nuspalvinti atitinkamame stulpelyje tiek langelių, kiek atitinkamų figūrų jis panaudojo konstruodamas. Pvz., jei mokinys sukonstravo figūrą (16 pav.), tai jis I stulpelyje nuspalvino 4, II–1, III–3, IV–3 langelius.

Apklausė mokinius ir nustatė, kas kokių figūrų panaudojo daugiausia ir lentoje irgi iškabinusi tuščią lentelę, paprašė vaikų užklijuoti tiek langelių, kiek daugiausia klasėje panaudojo įvairių figūrų. Pokalbio metu formulavo klausimus, panašius į aukščiau pateiktus. Taip vaikai per pamoką sudarė 3 diagramas, išmoko pagal jas atsakyti į klausimus, įprato vartoti jiems naują terminą.

5. 5. Tipinės mokinių klaidos, daromos įvaldant matematines sąvokas

Rusų pedagogikos klasikas Konstantinas Ušinskis (1824–1871) perspėjo, kad labai svarbu teisingai mokyti vaiką nuo pat pirmųjų matematikos pamokų: „Daugelis vaikų atrodo nenuovokūs aritmetikoje todėl, kad nėra reikiamai įsisavinę aritmetinės kalbos. O mokytojas, skirdamas vaikams uždavinį raštu ir kartu pratindamas prie naujos jiems kalbos, daro didelę pedagoginę klaidą: jis reikalauja iš vaikų vienu metu dviejų darbų ir vaikus labai apsunkina, todėl jie negali kaip reikiant atlikti nei vieno, nei kito. Štai kodėl aš patariu iš ankšto įpratinti vaikus rašyti ir skaityti jau išspręstus uždavinius, o jau paskiau pradėti spręsti uždavinius raštu“ [109, p. 608], t. y. K. Ušinskis mokant siūlo laikytis tokio nuoseklumo:

„ penki ir trys bus aštuoni
5 ir 3 bus 8
5 + 3 = 8“ [109, p. 608].

Visi šie perspėjimai tinka ir mokant matematinių sąvokų.

Ypač dažnos klaidos apibrėžimų formuluotėse. Aptarsime pagrindines klaidas.

Dažniausiai susiduriama su pirmosios apibrėžimų taisyklės – proporcingumo taisyklės (*Dfd* = *Dfn*) pažeidimu. Pirmasis pažeidimų atvejis yra *Dfd* < *Dfn* (per platus apibrėžimas): „Apskritimo skersmuo – tiesės atkarpa, jungianti du to apskritimo taškus“. Dar pora tokių klaidų pavyzdžių: 1) „Iracionalusis skaičius – begalinė dešimtainė trupmena“. Šiuo atveju į iracionaliųjų skaičių aibę bus įskiriamos ir periodinės trupmenos, kurios yra racionalieji skaičiai. Todėl teisingausia iracionalųjį skaičių apibrėžti kaip begalinę neperiodinę dešimtainę trupmeną. 2) „Tiesės a ir b vadinamos lygiagretėmis, jei jos neturi bendrų taškų arba sutampa“ – per platus apibrėžimas, į lygiagrečių tiesių visumą įeis ir prasilenkiančiosios tiesės.

Pasitaiko ir kitas proporcingumo taisyklės pažeidimas *Dfd* > *Dfn* (per siauras apibrėžimas): „Rombas – stačiakampis, kurio gretimos kraštinės lygios“. Dar pora klaidingų apibrėžimų pavyzdžių su paaiškinimais: 1) „Iracionalusis skaičius – šaknis iš racionaliojo skaičiaus tuo atveju, kai ji tiksliai neišsitraukia“. Šiuo atveju į racionaliųjų skaičių aibę nepatenka nei skaičius π, nei skaičius e, nei $lg\,2$ ir t. t. 2) „Tiesės a ir b, esančios vienoje plokštumoje ir neturinčios bendrų taškų, vadinamos lygiagretėmis“ – per siauras apibrėžimas, nes čia sutampančios tiesės nelaikomos lygiagretėmis.

Prie proporcingumo taisyklės pažeidimų priskiriama ir tokia mokinių daroma klaida, kuri pažeidžia reikalavimą: *tarp esminių rūšinių požymių sąvokos apibrėžime neturi būti tokių požymių, kurie yra esminių požymių, esančių apibrėžime, išvados*. Pvz.: apibrėžime: „ Lygiakraštis trikampis – trikampis, kurio visos kraštinės ir visi kampai lygūs“, nereikalinga paskutinė dalis, prasidedanti „ir“, nes kampų lygybė seka iš kraštinių lygybės. Tokių klaidų priežastis slypi štai kur: kai kurias sąvokas galima visiškai teisingai apibrėžti keliais būdais. Tik vieni apibrėžimai būna paprastesni, trumpesni, kiti – ilgesni. Antai panagrinėjus du kvadrato apibrėžimus: „Kvadratas – rombas, kurio vienas kampas status“ ir „Kvadratas yra lygiagretainis su lygiomis kraštinėmis ir stačiu kampu“, matome, kad pirmasis yra prieinamesnis, paprastesnis, nes į antrąjį apibrėžimą faktiškai yra įtrauktas rombo apibrėžimas. Tinkamas yra ir dar vienas kvadrato apibrėžimas: „Kvadratas – stačiakampis, kurio kraštinės lygios“. Taigi reikia siekti, kad rūšinis skirtumas būtų kuo trumpiau nusakomas, minimalesnis. Tokį apibrėžimą vadiname *minimaliu* (lot. *„minimalis“* – mažiausias).

Taigi rūšinį skirtumą pasirinkus ne minimalų, apibrėžimas tampa griozdiškesniu. Dar blogiau yra tada, kai į apibrėžimą mokiniai įveda logiškai priklausomas savybes: tokius apibrėžimus mokiniai dažnai formuluoja kartodami išeitą medžiagą. Užmiršdami, kokios savybės buvo įtraukiamos į apibrėžimą, o kurios buvo įrodomos, remdamiesi šiuo apibrėžimu kai kurie mokiniai įtraukia į jį ir vienas, ir kitas savybes, pvz.: „Lygiagretainis – keturkampis, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios ir lygios“. Iš tiesų, lygiagretainio brėžinys „pakiša“ tokį apibrėžimą ir, jei mokiniai nebuvo mokomi logiškai tvarkyti lygiagretainio savybių, o tik jų mokėsi, tai tokios klaidos visiškai įmanomos. Čia yra pažeistas apibrėžimo minimalumo reikalavimas.

Pasitaiko ir esminių sąvokos požymių praleidimų. Pvz.: „Kvadratas – keturkampis, kurio visi kampai statūs“. Toks kvadrato „apibrėžimas“ išplečia šios sąvokos apimtį – tai stačiakampio apibrėžimas.

Dažnai pasitaiko „ydingojo rato“ klaida. Paprasčiausi pavyzdžiai: 1) „Sudėtis yra veiksmas, kuriuo apskaičiuojama suma“, „Suma – sudėties rezultatas“. 2) ,,Statusis kampas – kampas, kuris lygus 90°“, „Kampo laipsnis – 1/90 stataus kampo dalis“. Šiuose pavyzdžiuose matome, kad viena sąvoka apibrėžiama remiantis kita, o pastaroji apibrėžiama per pirmąją ir taip abi sąvokos lieka griežtai neapibrėžtos.

Kai apibrėžiamoji ir apibrėžiančioji sąvokos savo turiniu yra tapačios, tada turime tokį „ydingojo rato“ atvejį, kuris vadinamas *tautologija*: „Status kampas – tai kampas, kuris turi 90°“, „Status kampas – toks kampas, kurio kraštinės statmenos viena kitai“. Mokykloje statųjį kampą įprasta apibrėžti kaip vieną iš lygių gretutinių kampų. Jei mokiniai pasako antrąjį tautologinį jo apibrėžimą, paklausus, kaip jie apibrėš tarpusavyje statmenas tieses, dažnai sulaukiame atsakymo: „Susikertančias tieses, sudarančias stačius kampus, vadiname tarpusavyje statmenomis“. Dar labiau pasireiškia tautologija, kai objektą bandoma apibrėžti grynai per save patį: „Panašiomis figūromis vadiname figūras, kurios yra tarpusavyje panašios“.

Aukščiau minėti „apibrėžimai“, kaip ir šis: „Geometrija yra mokslas apie geometrinių figūrų savybes“ yra atviro „ydingojo rato“ pavyzdys. Yra atvejų, kai „ydingasis ratas“ būna užmaskuotas, pvz., apskritimo ilgio apibrėžime. Paprastai iš pradžių įrodomas į apskritimą įbrėžtų taisyklingų daugiakampių perimetrų ilgių ribos egzistavimas, kai daugiakampio kraštinių skaičius vis dvigubinamas. Po to ši riba ir laikoma apskritimo ilgiu. Tačiau, jau įrodinėdami šios ribos egzistavimą mokiniai bando kaip pagrindą nurodyti viršutinę perimetrų sekos ribą – apskritimo ilgį. Taip ir gaunamas „ratas“: apskritimo ilgis apibrėžiamas kaip riba, kurios egzistavimas nustatomas pasinaudojant apskritimo ilgiu. Ši klaida paaiškinama tuo, kad čia supainiojamos dvi sąvokos: apskritimas (geometrinė figūra, kuri mokiniams seniai yra žinoma) ir apskritimo ilgis (skaičius, kurį tik rengiamės apibrėžti). Tam pasitarnauja ir brėžinys, kuris šiuo atveju suvaidina neigiamą vaidmenį.

Apibrėžimai neturi remtis naujomis, dar neapibrėžtomis sąvokomis. Negalima leisti, kad, aiškinant nesuprantamo termino prasmę, būtų naudojamasi lygiai taip pat arba dar labiau nesuprantamu terminu (lot. *„obscurum per obscurius“*), t. y. tamsus, neaiškus dalykas aiškinamas dar neaiškiau. Pvz., skaičius $e = 2{,}7182818...$ yra natūrinių logaritmų pagrindas, tad netinka aiškinti: „natūrinis logaritmas yra logaritmas, kurio pagrindas yra skaičius e“. Todėl teisingai elgiantis skaičius e apibrėžiamas formule:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}).$$

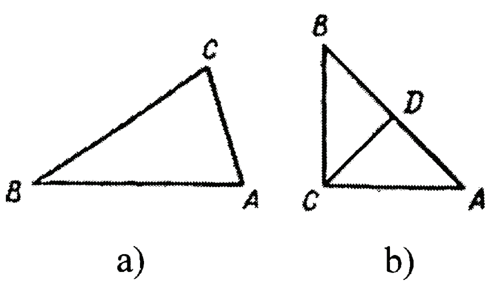
Kartais apibrėžime nurodoma ne ta apibrėžiančioji aibė, iš kurios išskiriamas apibrėžiamasis poaibis. Pvz., sakoma: „Trikampio aukštinė yra tiesė ...“, o reikia sakyti: „Trikampio aukštinė yra atkarpa“.

Kai kada mokiniai pateikia apibrėžimus taip, kad juose nėra apibrėžiamosios sąvokos, ji pakeičiama žodžiais: „tas“, „tai“, „jei“, „kada“ ir pan. Taip dažniausiai atsakoma į mokytojo klausimą, pvz., jei klausiama: „Kokias trapecijas vadiname lygiašonėmis?“, atsakoma: „Tokias, kurių ...“. Ši klaida dažnai pasitaiko kai kurių mažiau patyrusių mokytojų pamokose. Jos priežastis – mokytojai nepratina į klausimą pateikti išsamų atsakymą.

Apibrėžimas neturėtų būti neigiamas, bet kartais be to išsiversti neįmanoma: a) „Iracionalusis skaičius yra toks skaičius, kurio negalima išreikšti trupmena $\frac{p}{q}$, kur p ir q – sveikieji skaičiai ir $q \neq 0$“; b) „Prasilenkiančiosios tiesės – tiesės, kurios nesikerta ir nėra lygiagrečios“.

Sąvokai apibrėžti naudojamas vienas apibrėžimas. Jei yra du ar keli sąvokos apibrėžimai, reikia įsitikinti jų ekvivalentumu ir naudotis tuo apibrėžimu, kuris tuo momentu reikalingesnis (pvz., dažnai naudojamasi abiem kvadrato apibrėžimais). O kad taip sąvoka dažnai gali būti apibrėžta keliais būdais, nieko nėra nuostabaus, nes apibrėžimo pagrindas yra savybė, būdinga visiems kurios nors klasės objektams ir tik jiems, o tokių savybių gali būti ir ne viena. Tad naudojamasi patogesniu, trumpesniu ar labiau konkrečiai situacijai tinkamu apibrėžimu.

Įvedant naujas sąvokas, jokiu būdu negalima apsiriboti vienu pavyzdžiu, nes mokiniai tada gali suprasti sąvoką neteisingai. Dažniausiai tai pasireiškia neteisėtais apibendrinimais (pagal neesminius požymius arba esminius požymius supainiojant su neesminiais). Ypač dažnai mokiniai neatpažįsta žinomų geometrinių figūrų, jei tik brėžinys neįprastai orientuotas. 17 pav. [127, p. 79] atveju (*a*) mokiniai neatpažįsta lygiašonio trikampio, atveju (*b*) sunkiai atranda panašiųjų trikampių poras.

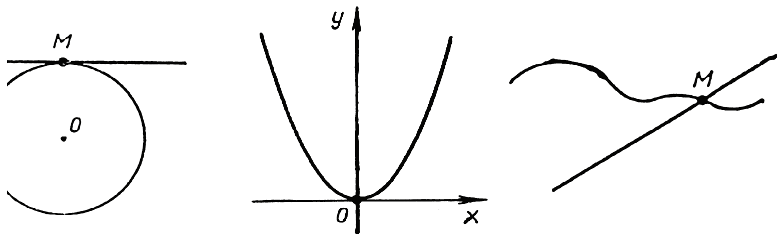


17 pav.

Labai padeda sąmoningai įsisavinti matematines sąvokas žodžiu atliekami pratimai, pvz.:

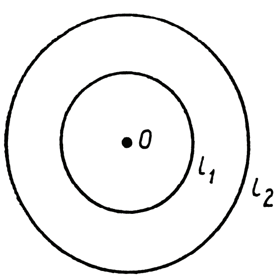
1. Patikslinkite, jei to reikia, šiuos apibrėžimus: a) ekvivalenčiomis vadinsime dvi lygtis, kada pirmosios lygties šaknys yra antrosios lygties šaknimis; b) tiesė, dalijanti trikampio kraštinę pusiau, vadinama pusiaukraštine; c) atkarpa, jungianti dviejų trikampio kraštinių vidurius ir lygi pusei trečiosios kraštinės, vadinama trikampio vidurine linija.

2. Pateikite pavyzdžius, kurie paliudytų šių apibrėžimų klaidingumą: 1) kreivės liestinė – tiesė, turinti su kreive tik vieną bendrą tašką; 2) jeigu atstumas nuo bet kurio linijos l_1 taško iki antrosios linijos l_2 atitinkamo taško – pastovus, tai tokios linijos – lygiagrečios. Pavyzdžiai čia būtų: 1 atvejui – 18 pav., b ir c, ir 2 atvejui – 19 pav. [127, p. 79–80].



a) b) c)

18 pav.



19 pav.

Nustatę kurio nors termino tikslią prasmę, mes jį ir turime naudoti ta pačia prasme. Tačiau tam neprieštarauja tai, kad, žengiant į aukštesnę pakopą, kuriai pirmesnioji buvo atskiras atvejis, dažnai tenka apibendrinti daugelį anksčiau naudotų sąvokų ir dėl to naujai jas apibrėžti, neretai paliekant buvusį sąvokos pavadinimą. Pvz., natūraliųjų skaičių daugyba buvo apibrėžiama kaip lygių dėmenų sudėtis, tačiau racionaliųjų skaičių daugybai jau reikia kitokio apibrėžimo, į kurį ankstesnis apibrėžimas įeis kaip sudedamoji dalis.

Tas pats mokyklinio matematikos kurso skyrius gali būti sukurtas naudojantis skirtingų sąvokų sistemomis. Gali skirtis arba sąvokų įvedimo tvarka, arba pačios sąvokos. Pradinių sąvokų pasirinkimas griežtai nenustato jų mokymosi tvarkos. Sąvokų sistema pasirodo esanti tik iš dalies sutvarkyta santykiu „eiti prieš“, suprantamu kaip ėjimas prieš laiko atžvilgiu. Todėl iškyla uždavinys kaip pedagogiškai tikslinga įvesti sąvokas viena ar kita tvarka. Kada kalbama apie tradicinės medžiagos šiuolaikinį traktavimą, turimi galvoje tos pačios empirinės medžiagos matematinio sutvarkymo būdai. Pvz., empirinė medžiaga, kuria remiasi mokyklinė geometrija, sutvarkyta remiantis vektorinės erdvės sąvokų sistema, padeda sukurti racionalesnį mokyklinį geometrijos kursą.

Apibendrinant būtina pabrėžti, kad yra naudinga:

1) neįvedinėti naujų sąvokų formaliai; detaliai konkretizuoti naujas abstrakčias sąvokas; pagal galimybes taikyti konkretųjį indukcinį sąvokų įvedimo būdą;
2) įvesti sąvokas kuo natūralesniu mokiniams keliu; pagal galimybes dažniau įtraukti mokinius į savarankišką sąvokos nagrinėjimą, jos apibrėžimo formulavimą;
3) motyvuoti įvedamas sąvokas, terminus, apibrėžimus; siekti, kad mokiniai nesusidarytų nuomonės, jog naują sąvoką galima įvesti bet kaip;
4) naujų sąvokų nagrinėjimo procese išryškinti jų ryšius su jau įvestomis sąvokomis; kur galima – remtis analogija;
5) kiekvienoje pamokoje stengtis pakartoti apibrėžimus tų sąvokų, su kuriomis operuojama toje pamokoje;
6) formuojant naujas sąvokas, labai griežtai kontroliuoti mokinių kalbą, reikalauti jos tikslumo, trumpumo, griežtumo formuluojant apibrėžimus;
7) visada turėti omenyje, kad klaidų profilaktika yra efektyvesnė nei jų taisymas.

Aptariant paskutinę išvadą plačiau, būtina pažymėti, kad kartais taikoma neteisinga mokinių klaidų, padarytų formuluojant apibrėžimus, taisymo metodika. Mokiniui pasakius neteisingą apibrėžimą, mokytojas klausia antrą, jei reikia – trečią ir kitus mokinius, kol išgirsta teisingai suformuluotą apibrėžimą ir visiems mokiniams liepia jį keletą kartų choru pakartoti. O klaidos esmė lieka neišaiškinta. Ją išaiškinus, mokiniai ateityje nebeklystų, o mintinai išmoktas apibrėžimas tokios garantijos neduoda – atmintis ateityje gali vėl iškrėsti pokštą, nes užmiršimas – viena iš atminties savybių.

III. EMPIRINĖS MEDŽIAGOS MATEMATINIS SUTVARKYMAS NAUDOJANTIS NEDEDUKCINIAIS SAMPROTAVIMAIS

1. BENDROS PASTABOS

Empirinė (gr. *„empeiria“* – patyrimas) medžiaga – mus supantys realūs daiktai, turintys apibrėžtas savybes, sukuriantys realius santykius, arba objektų ir santykių sistema iš kurios nors mokslo srities (fizikos, chemijos, biologijos, geografijos, istorijos ir kt.), arba specialiai mokymui naudojami daiktai (didaktinė medžiaga), arba matematinė medžiaga (matematinių objektų sistema), kada ji toliau tvarkoma (apibendrinama, abstrahuojama). Matematinės sąvokos, teiginiai ir samprotavimai sudaro matematinės medžiagos pagrindinį turinį, faktinę medžiagą. Tačiau reikia žinoti, iš kur tie faktai gauti, kaip juos gauti, kaip viso to išmokyti mokinius.

Empirinės medžiagos matematinis sutvarkymas realizuojamas įvairiuose mokymo etapuose, kada mokinys: a) dar nėra įvaldęs apibrėžtos matematinės medžiagos ir sprendžiamas pedagoginis uždavinys – įvaldyti ją, išskirti matematines sąvokas iš konkrečių situacijų, atrasti matematinius dėsningumus, atspindinčius nagrinėjamos realios daiktinės srities savybes; b) yra įvaldęs būtiną matematinį aparatą ir matematinio empirinės medžiagos sutvarkymo tikslas – pritaikyti jau žinomas matematines sąvokas konkrečioje situacijoje susijusiems su ja uždaviniams spręsti. Šie du aspektai gana smarkiai skiriasi savo logine struktūra.

Matematika operuoja idealiais objektais. Tačiau visi šie matematiniai objektai atspindi materialiųjų objektų savybes, materialaus pasaulio dėsningumus; jų idealus pobūdis reiškia paprastą abstrahavimąsi nuo neesminių materialiųjų objektų savybių, ir tada nagrinėjamos savybės tampa bendros. Todėl visi matematiniai teiginiai ir sąvokos yra giliausių ir bendriausių realaus pasaulio savybių atspindys.

Pažindamas mokslo tiesas, tyrinėtojas naudojasi ypatingomis matematinėmis priemonėmis, mokslinio tyrimo metodais. Mokymo procese mokiniams irgi reikia stengtis sudaryti sąlygas naudotis matematinio tyrimo moksliniais metodais: 1) stebėjimu ir bandymu; 2) lyginimu; 3) analize ir sinteze; 4) apibendrinimu ir specializacija; 5) abstrahavimu ir konkretizavimu.

Dabar apsiribosime tik aukščiau minėto pirmojo (a) aspekto analize. Pagrindiniai jo komponentai – stebėjimai, bandymai, indukcija, analogija, apibendrinimas ir abstrahavimas – iš esmės tai yra indukciniai metodai. Indukcinis metodas yra ir euristinis metodas. Mąstymo veikloje visi išnagrinėti komponentai taikomi bendrai. Atskirai jie nagrinėjami tik tam, kad būtų patogiau juos išanalizuoti.

2. STEBĖJIMAI IR BANDYMAI

Stebėjimas – objektų ar reiškinių savybių ar santykių, esant natūralioms sąlygoms, nagrinėjimo metodas. Stebėjimas nuo paprasto objekto ar reiškinio suvokimo skiriasi tuo, kad čia ne tik suvokiama, bet ir sąmonėje, žodžiu, popieriuje ar kompiuteryje raštu stebėjimo rezultatai yra užfiksuojami.

Bandymas (eksperimentas) – toks objektų ar reiškinių nagrinėjimo metodas, kuriuo mes veikiame jų realią būklę ar vystymąsi, sukurdami reikiamas dirbtines sąlygas, dirbtinai juos suskaidydami į dalis arba jungdami su kitais objektais ar reiškiniais.

Kiekvienas eksperimentas susijęs su stebėjimu – stebima eksperimento eiga, objektų ar reiškinių būklė, jų kitimas.

Aptartieji metodai yra pagrindiniai eksperimentiniuose moksluose (fizikoje, chemijoje). Matematika – ne eksperimentinis mokslas, šie metodai joje nėra pagrindiniai ir joks eksperimentinis patikrinimas bandymu negali būti pakankamas jos teiginių patvirtinimas. Tai neabejotinai teisinga, jei turime galvoje matematiką kaip dedukcinę teoriją, tačiau prieš išvedant dedukcinę teoriją visada remiamasi faktais, o po to ši teorija pritaikoma praktikoje. Visa tai yra ne mažiau svarbu, kaip pati dedukcinė teorija: juk ją reikia ir suprasti, ir pateisinti, parodant, kad ji gali būti pritaikoma, t. y. reikia rūpintis ne vien tuo, kad tai, ko mokomės, būtų griežtai įrodyta, bet ir tuo, kad būtų suprantama.

Todėl stebėjimai ir bandymai mokant matematikos yra svarbūs. Pvz., labai naudingi šie metodai tokiu atveju, kai nagrinėjamos figūrų plotų ir perimetrų savybės, jų santykiai: galima parodyti, kad egzistuoja daugiakampiai, turintys lygius plotus, bet skirtingus perimetrus, bei turintys lygius perimetrus, bet skirtingus plotus. Taikant šiuos metodus reikia nuolat priminti, kad jie griežtai nepagrindžia matematinio fakto, bet dažnai padeda jį nustatyti.

Ilgametė pedagoginė praktika liudija, kad išradingas indukcinis faktų pagrindimas užtikrina jaunesniajame mokykliniame amžiuje gilesnį, tvirtesnį nagrinėjamos medžiagos įsisavinimą, negu formalusis dedukcinis pagrindimas. Pernelyg ankstyvas dedukcinių įrodymų įvedimas ne tik nepadeda ugdyti mokinių loginio mąstymo, bet, priešingai, stabdo jį. Žemesnėse klasėse svarbiausią vaidmenį turi vaidinti indukciniai metodai, ypač faktų nustatymas bandymais, tiesioginis mokinių patyrimo panaudojimas (figūrų iškirpimas iš popieriaus, perlenkimai, uždėjimai ir t. t.).

Tai primena ne geometriją, bet fiziką, darbinį mokymą. Iš tiesų eksperimentiniu metodu, įprastu šiems dalykams, nagrinėjami realūs objektai, susieti realiais tarpusavio ryšiais.

Ypač svarbus yra eksperimentinis metodas žemesnėse klasėse (I–VI), kur daug remiamasi mokinių intuicija palaipsniui įvedant dedukcijos elementus. Tai reikia realizuoti po truputį sudarant problemines situacijas, reikalaujančias loginio įrodymo.

Mokant geometrijos bandymai papildo gyvenimo patyrimą, ir be įrodymo intuityviai priimame aiškius teiginius, patvirtinamus gyvenimo patyrimu. Kitaip sakant, kalbama apie pernelyg išplėstą, priklausomą aksiomų sistemą, nors, iš kitos pusės, ji nepilna, todėl kartais dėl to vadinama psichologine (skirtingai nuo loginės).

Neteisingi yra tvirtinimai, kad be įrodymo priimant didelį skaičių teiginių, griaunama loginė mokyklinės geometrijos sistema. Loginė mokyklinės geometrijos sistema įtikina ne vien tuo, kad visi jos teiginiai pagrindžiami loginiu keliu, bet ir tuo, kad už šios sistemos nugaros stovi patirtis, užtikrinanti aksiomų teisingumą. Patyrimo, bandymo, stebėjimo keliu gauti rezultatai turi tapti prielaidomis indukcinėms išvadoms suformuluoti.

3. INDUKCIJA

Ėjimas nuo atskiro prie bendro, nuo faktų, nustatytų stebėjimais, bandymais, patyrimu, prie apibendrinimų yra pažinimo dėsningumas. Vienas iš tokio ėjimo būdų – *indukcija*. Indukcinis samprotavimas susiformavo ilgaamžės istorinės ir kūrybinės žmonių praktikos metu ir yra kilęs iš stebėjimų bei bandymų. Pirmasis indukciją įvardijo Sokratas (*Sōkratēs*, 469–399 pr. Kr.). Indukcija turi tris pagrindines reikšmes: 1) vienas iš samprotavimo būdų, kurio metu iš dviejų ar daugiau dalinių sprendinių gaunamas naujas bendras sprendinys (išvada); 2) tyrimo metodas, kurį taikant tiriami kurios nors objektų aibės (arba kokio nors reiškinio) atskiri objektai (aplinkybės), nustatant juose tas savybes, kurios būdingos visai objektų aibei (aplinkybėms, nuo kurių priklauso nagrinėjamasis reiškinys); c) medžiagos pateikimo forma literatūros šaltinyje, pokalbyje, mokymo procese, kada nuo dalinių teiginių prieinama prie bendrųjų teiginių (išvadų).

Skiriama nepilnoji ir pilnoji indukcija.

Nepilnoji indukcija (kaip tyrimo metodas) – indukcija, kurioje neišnagrinėjami visi daliniai atvejai. Ji dažnai taikoma pedagoginiais tikslais padedant suformuluoti moksle įrodytus, bet mokiniams naujus matematikos dėsnius, taisykles, algoritmus, kurių griežtų įrodymų mokiniai dar nepajėgūs suvokti. Taip mokiniai mokomi matematikos veiklos. Plačiau apie ją – toliau.

Pilnoji indukcija – išvada, pagrįsta išnagrinėjimu visų dalinių atvejų, susijusių su duotąja situacija. Pvz.: a) pirminių skaičių skaičiaus nustatymas kuriame nors intervale; b) įbrėžtinio kampo didumo nustatymas įrodant teoremą (3 atvejai).

Vienas iš pagrindinių indukcijos uždavinių yra nustatymas priežastinių ryšių tarp objektų ar reiškinių. Tam taikomas *eksperimentinės indukcijos metodas*, kurio yra 4 rūšys. Aptarsime jas.

1. *Sutapimo metodas*. Tegul reikia nustatyti kokio nors reiškinio (objekto savybės) atsiradimo priežastį *a*. Bandymai ir stebėjimai rodo, kad ši savybė atsi-

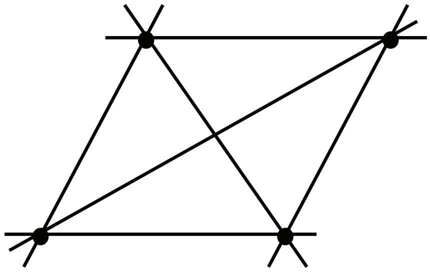
randa esant aplinkybėms A, B, C. Nagrinėdami įvairiausius atvejus, pastebime, kad priežastis *a* pasirodo esant tik aplinkybei A, o B ir C nėra būtinos. Tada daroma išvada, kad aplinkybė A yra reiškinio *a* priežastis. Matematikos mokymo procese šis metodas taikomas įvedant naujas sąvokas, nagrinėjant naujas matematinio objekto savybes, klasifikuojant jas pagal kokį nors požymį.

2. *Skirtumo metodas*. Jeigu kokio nors reiškinio (savybės) pasireiškimo ar nepasireiškimo atvejai sutampa visomis aplinkybėmis, be vienos, kuri pasirodo esanti tik reiškinio (savybės) pasireiškimo atveju, tai ši vienintelė aplinkybė ir yra duotojo reiškinio priežastis.
3. *Liekanų metodas*. Jo schema: a) aplinkybės *a, b, c* yra vienintelės, kurios gali būti sudėtinio reiškinio A, B, C priežastimis ; b) yra žinoma, kad *a* yra reiškinio dalies A priežastis, o *b* – dalies B priežastis; c) išvada: aplinkybė *c* yra dalies C priežastis. Šis metodas yra taikomas kaip prieštaravimo metodas, pvz., įrodant teoremą apie statmens vienatinumą, kai statmuo vedamas iš duotojo šalia tiesės taško į tą tiesę.
4. *Lydimųjų kitimų metodas*. Jei kokio nors reiškinio (objekto savybės) tam tikras pokytis visada sukelia tam tikrą pokytį ir kitame reiškinyje, tai pirmasis reiškinys gali būti antrojo reiškinio priežastis (arba išvada) arba yra priežastiniu ryšiu susijęs su tuo reiškiniu. Taip, pvz., mokiniams atskleidžiama trupmenų daugybos ir dalybos prasmė. Tai puikiai suvokė ikikarinės Lietuvos mokytojas Simonas Vainbergas (1894– ?). Jo straipsnyje [111] kaip tik ir analizuojamas skaičiaus dauginimas ir dalijimas iš trupmenos. Iliustruojant inscenizacijomis, sudaromos lentelės:

8 vaikai gavo po 3 obuolius – 8 × 3 = 24 (ob.)
....
8 vaikai gavo po ½ obuolio - 8 × ½ = 4 (ob.)
8 vaikai gavo po ¼ obuolio - 8 × ¼ = 2 (ob.)
....
20 obuolių išdalysime po 4 obuolius kiekvienam – 20 : 4 = 5 (v.)
....
20 obuolių išdalysime po ½ obuolio kiekvienam – 20 : ½ = 40 (v.)
20 obuolių išdalysime po ¼ obuolio kiekvienam – 20 : ¼ = 80 (v.)

Eksperimentinė indukcija dažnai yra naudinga „atspėjant“ matematinius dėsningumus.

Pvz., reikia išspręsti uždavinį: „Keliomis tiesėmis galima poromis sujungti n taškų, jei jokie 3 taškai nėra vienoje tiesėje?“ Sprendžiama taip: pagal uždavinio prasmę $n \geq 2$. Kai $n = 2$, tiesė bus viena. Kai $n = 3$, tiesių bus 3, t. y. padidėjo 2; kai



20 pav.

n = 4, tiesių bus 6, t. y. padidėjo 3 tiesėmis (20 pav.). Tada galima spėti, kad ieškomas tiesių skaičius bus:

$$S = 1 + 2 + 3 + ...+ (n - 2) + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Matematikos mokymo priemonė yra ne tik pilnoji, bet ir nepilnoji bei matematinė indukcija.

4. NEPILNOJI INDUKCIJA IR JOS VAIDMUO MATEMATIKOJE

4.1. Bendros pastabos

Nepilnosios indukcijos išvada yra tikėtina; jos tikslumo tikimybė įvairiais atvejais yra įvairi ir kinta intervale $0 \le p \le 1$.

Matematinėse teorijose naudojamasi tik pagrįstomis, tikromis išvadomis ir todėl nepilnoji indukcija jose netaikoma. Tačiau matematikos istorija liudija, kad kiekvienos matematinės teorijos raidoje nepilnoji indukcija vaidino ir tebevaidina svarbų vaidmenį. Pirmasis matematikos žinių kaupimosi periodas bu*vo matematinių faktų kaupimo periodas,* faktų, gautų kaip atsakymai į praktinėje veikloje iškilusius klausimus grynai empiriniu keliu. Antai aritmetikos dėsniai:

$$a + b = b + a,\ ab = ba,\ (a + b) + c = a + (b + c),\ (ab)\mathrm{c} = a(bc)$$

ir kt. yra indukcinės kilmės. Panašiai geometrijoje, kaupiantis faktams apie plotų (žemdirbystėje) ir tūrių (statyboje, kt. amatuose) matavimą, pasinaudojant nepilnąja indukcija buvo prieita prie apibendrinimų, formulių, aksiomų ir teoremų.

4.2. Nepilnoji indukcija matematinėje kūryboje

Matematinėje kūryboje ji taikoma kaip vienas iš euristinių metodų. Antai 1742 m. Peterburge dirbęs akademikas Christianas Goldbachas (*Goldbach*, 1690–1764) savo laiške L. Oileriui suformulavo teiginį, kad kiekvienas sveikasis ne mažesnis už 6 nelyginis skaičius gali būti užrašytas kaip trijų pirminių skaičių suma. L. Oileris jį papildė: bet kurį lyginį skaičių galima užrašyti kaip dviejų pirminių skaičių sumą. Abu šie teiginiai buvo suformuluoti pasinaudojant nepilnąja indukcija. Ch. Goldbacho laiške suformuluotoji problema vadinama trinariąja (dėl to, kad yra 3 nariai), o L. Eulerio laiške – binariąja (lot. *,,binarius"* – dvigubas) Goldbacho problema. Dabar Goldbacho–Oilerio problema formuluojama taip: „Bet kuris lyginis skaičius $n \ge 4$ yra dviejų pirminių skaičių suma, o bet kuris nelyginis skaičius

$n \geq 7$ yra trijų pirminių skaičių suma“ [119, p. 154]. Jos sprendimas pasirodė esąs ypač sudėtingas. 1937 m. rusų akademikas Ivanas Vinogradovas (1891–1983) pateikė dalinį jos sprendimą: išvedė asimptotinę formulę nelyginiam skaičiui išreikšti trijų pirminių skaičių suma. Tokių pavyzdžių matematikos istorijoje yra labai daug. Žymus vokiečių matematikas Feliksas Kleinas (*Klein*, 1849–1925) rašė: „tyrinėtojas matematikoje, kaip ir bet kuriame moksle <...> naudojasi savo fantazija ir juda pirmyn induktyviai, remdamasis euristinėmis pagalbinėmis priemonėmis“ [125, p. 336]. O „indukcinis darbas to, kas pirmasis suformulavo kokį nors teiginį, yra tiek pat vertingas, kaip ir dedukcinis darbas to, kas pirmasis šį teiginį įrodė, nes ir viena, ir kita vienodai svarbu“ [125, p. 336].

Tačiau matematinėse teorijose niekada nesitenkinama indukcinėmis išvadomis, jos yra tik hipotezės. Kad jos virstų matematiniais faktais, jas reikia dedukciniu būdu įrodyti.

4.3. Nepilnoji indukcija mokant matematikos

Kad supažindintume mokinius su paprasčiausiais matematiniais objektais ir jų sąryšiais, kad išvestume vienus sąryšius iš kitų, būtina parengti mokinių mąstymą jutiminių duomenų kaupimo būdu. Tie jutiminiai duomenys būtini tiek matematinėms sąvokoms suformuoti, tiek parengti operacijoms, kurias mokiniai turės atlikti, norėdami iš vienų sąryšių gauti kitus. O čia ir talkina nepilnoji indukcija. Pagrįsta stebėjimais, bandymais, konkrečiomis erdvinėmis formomis ir kiekybiniais santykiais, pavyzdžiais, ji yra galinga priemonė rengiant mokinius loginiam mąstymui, nes suteikia jutiminį šio mąstymo pagrindą. Todėl nepilnoji indukcija yra ypač reikšminga pradiniame matematikos mokymo etape. Jos protingas taikymas mokymo procese neprieštarauja matematikos metodologijai. Mokymo procese nepilnosios indukcijos keliu mokinių gautos išvados niekada neduos klaidingų rezultatų – tą garantuos mokytojas, žinantis atitinkamus matematinius teiginius. Nepilnoji indukcija padeda realizuoti didaktinius principus ir jų taisykles: mokymo vaizdumą, ėjimą nuo konkretaus prie abstraktaus, nuo dalinio prie bendro.

Vyresniosiose klasėse nepilnoji indukcija taikytina nagrinėjant teiginius, kuriuos, netaikant šio metodo, mokiniams sunku suprasti. Taigi kyla pavojus dėl jų formalaus įsisavinimo. Be to, šiose klasėse kinta ir pats indukcijos pobūdis: jei žemesnėse klasėse bandymai atliekami su konkrečiais daiktais ar jų vaizdais, tai vyresniosiose klasėse nagrinėjami abstraktūs matematiniai pavyzdžiai arba uždaviniai.

Bandymo pavyzdys: iškirpti iš popieriaus trikampį, atplėšti du jo kampus ir pridėti prie trečiojo – gausime ištiestinį kampą. Pats bandymas netgi nurodo kelią, kaip reikia įrodyti teoremą – reikia papildyti brėžinį taip, kad trikampio vidaus kampai būtų „sukeliami“ į vieną vietą.

5. PILNOJI INDUKCIJA IR JOS VAIDMUO MATEMATIKOJE

5.1. Bendros pastabos

Šią sąvoką jau vartojo Aristotelis (*Aristotelēs*, 384–322 pr. Kr.), todėl ji kartais vadinama Aristotelio indukcija, dar kartais – tobuląja, formaliąja, nes duoda tikslius rezultatus. Pilnoji indukcija taikoma ten, kur būna keletas ryškiai skirtingų atvejų. Antai, kaip jau minėta, nagrinėjant įbrėžtinio kampo savybes, buvo išskirti 3 atvejai: 1) apskritimo centras yra vienoje įbrėžtinio kampo kraštinėje; 2) šis centras yra įbrėžtinio kampo viduje; 3) centras yra šalia įbrėžtinio kampo.

5.2. Pilnoji indukcija matematikoje

Matematikoje plačiai naudojamas įrodymo ir apibrėžimo metodas – *matematinė indukcija* – pagrįstas teorinės aritmetikos aksioma: jei visų natūraliųjų skaičių aibės N poaibis M turi 2 savybes: a) $1 \in$ M, b) iš $k \in$ M išplaukia $k + 1 \in$ M, tai M = N. Įrodant teiginį T(n) matematinės indukcijos metodu, įsitikinama, kad: a) T(1) yra teisingas teiginys; b) jei T(k) teisingas, patikrinama, ar T(k + 1) irgi teisingas. Matematinės indukcijos metodu išvedamos progresijų, kombinatorikos ir kt. formulės, įrodomos kai kurios teoremos. Matematinė indukcija apibendrinama bet kuriai sutvarkytai aibei.

5.3. Pilnoji indukcija mokant matematikos

Mokant paprastųjų trupmenų daugybos, pradžioje išanalizuojami šie atvejai: a) trupmenos dauginimas iš natūraliojo skaičiaus; b) natūraliojo skaičiaus dauginimas iš trupmenos; c) trupmenos dauginimas iš trupmenos; d) mišriųjų skaičių dauginimas. Visais atvejais suformuluojamos taisyklės. Tačiau jų gausa nėra patogi ir ieškoma bendros taisyklės, o tokia pasirodo esanti atvejo (c) taisyklė.

6. ANALOGIJA MOKANT MATEMATIKOS

Vienas iš svarbių samprotavimo tipų yra *tradukcinis samprotavimas* (lot. *„traductio“* – perkėlimas). Jame iš dviejų ar keleto bendrųjų teiginių gaunamas naujas bendrasis teiginys. Pvz.: a, b, c – realieji skaičiai ir $a > b$, $b > c$, tada $a > c$.

Svarbiausia tradukcinio samprotavimo rūšis – *analogija*. Išvados, gautos analogijos keliu – tikėtinos. Jos tampa vienu iš šaltinių mokslinėms hipotezėms formuluoti.

Tarp nepilnosios indukcijos ir analogijos yra sutapimų ir skirtumų. Abu šie metodai veda prie išvadų, kurias reikia nagrinėti toliau, kad įsitikintume jų teisingumu ar atmestume jas, kaip klaidingas. Skirtumai: nepilnojoje indukcijoje einama nuo atskirų objektų ar atskirų jų rūšių prie jų „giminės“; analogijoje – nuo vieno objekto prie kito ar nuo vienos objektų klasės prie kitos.

Griežtose matematinėse teorijose analogija netaikoma. Ji taikoma tik matematinėje kūryboje kaip vienas iš euristinių metodų keliant hipotezes. Analogija padėjo sukurti tokias matematines teorijas: kompleksinio kintamojo funkcijų teoriją, n-mačių erdvių geometrijas.

Analogijos vaidmuo mokymo procese yra dvipusis: arba ji yra teigiamas euristinis faktorius, arba ji veda prie neteisingos išvados, kuri, reikiamai nepagrįsta, imama taikyti uždavinių bei pratimų sprendimui ir tokiu būdu nuveda besimokantįjį klaidingu keliu.

Kaip teigiamas euristinis faktorius analogija padeda mokiniams: a) atrasti naują jiems teiginį ir suformuluoti jį; b) pasirinkti teiginio įrodymo būdą; c) surasti uždavinio ar sprendimo kelią.

Populiarūs analogijos pavyzdžiai: a) algebroje, aritmetikoje – veiksmai su dešimtainėmis trupmenomis analogiški veiksmams su natūraliaisiais skaičiais, algebrinės trupmenos nagrinėjamos remiantis analogija su paprastosiomis trupmenomis; b) geometrijoje – daugelis plokščiųjų figūrų turi savo analogus erdvėje (lygiagretainis – gretasienis, apskritimas – sfera, skritulys – rutulys, trikampis - tetraedras ir t. t.); teoremos apie nupjautinio kūgio tūrį įrodymo metodas yra analogiškas nupjautinės piramidės tūrio apskaičiavimo teoremos įrodymui; kai kurios stereometrijos teoremos savo turiniu bei įrodymo būdu analogiškos planimetrijos teoremoms (apie statmenį ir pasvirąsias, nubrėžtas į tiesę ar plokštumą, apie tiesių ir plokštumų lygiagretumą).

Analogija – tai lyginimas, mintyse nustatant tapatumą ar skirtingumus tarp nagrinėjamų objektų. Lyginimo principai:

1. Lyginti galima tik tokius objektus, kurie turi tam tikrą tarpusavio ryšį, t. y. lyginimas turi turėti prasmę (pvz., gali būti lyginamos dviejų funkcijų savybės).
2. Lyginimas turi vykti planingai, t. y. reikia tiksliai išskirti tas savybes, pagal kurias lyginama (pvz., daugiakampiai gali būti lyginami pagal plotą arba perimetrą).
3. Lyginimas pagal tas pačias matematinių objektų savybes turi būti atliktas iki galo.

Jau I klasėje sprendžiami paprastieji netiesioginiai uždaviniai. Mokant jų sprendimo be lyginimo iš viso būtų neįmanoma apsieiti. Pvz.: a) *Tiesioginis uždavinys*: Jonukas turi 8 obuolius, o Onutė – 2 obuoliais daugiau. Kiek obuolių turi Onutė? b) *Netiesioginis uždavinys*: Jonukas turi 8 obuolius arba 2 obuoliais mažiau negu Onutė. Kiek obuolių turi Onutė?

Taip pat lyginimas yra būtinas, kai I klasėje sprendžiami skirtuminio bei kartotinio palyginimo, skaičiaus didinimo (mažinimo) keliais vienetais (kelis kartus) paprastieji uždaviniai. Toks palyginimas padeda mokiniams geriau įsisavinti frazių „padidinti (sumažinti)“ ir „keliais vienetais (kelis kartus)“ prasmę, nustatyti ryšius tarp uždavinių sąlygų ir jų sprendimo būdų [9, p. 104]. Vyresniosiose klasėse, kai mokiniui nesiseka išspręsti uždavinio su dideliais skaičiais, labai padeda analogiško uždavinio sprendimas su mažais skaičiais. Tokio uždavinio sprendimo būdas pagal analogiją pritaikomas pradinio uždavinio sprendimui.

Gilesnė analogijos rūšis, kurios išvados yra tobulos, patikimos yra *izomorfizmas* (gr. *„isos"* – toks pat, vienodas, panašus, gr. *„morphē"* – forma). Nustatę izomorfizmą tarp dviejų ar kelių objektų sistemų, galime perkelti bet kurį teiginį, kuris yra teisingas vienoje iš šių sistemų, į kitas sistemas.

Analogijos vaidmenį matematikoje ypač akcentavo lenkų matematikas Stefanas Banachas (*Banach*, 1892–1945), kuris pabrėžė, kad matematikas – žmogus, sugebąs rasti analogijas tarp teiginių, o geresnis matematikas – tas, kuris pastebi analogijas tarp teorijų. Galima įsivaizduoti ir tokį matematiką, kuris mato analogijas tarp analogijų.

Analogija gali būti: a) *paprastoji*, kurioje iš objektų sutapimo keliais požymiais daroma išvada apie jų sutapimą likusiais požymiais; b) *išplėstinė*, kurioje iš reiškinių sutapimo daroma išvada apie jų priežasčių sutapimą. Kartu šios abi analogijos gali būti: a) *griežtos*, kurioms esant lyginamų objektų požymiai priklauso vienas nuo kito; b) *negriežtos*, kurioms esant lyginamų objektų požymiai nėra aiškiai priklausomi vienas nuo kito.

Analogija – vienas labiausiai taikomų metodų moksliniuose tyrimuose. Tik per analogijas tyrėjas dažnai prie teisingų teiginių apie nagrinėjamo objekto savybes, kurias galima patvirtinti ar paneigti bandymais ar griežtesniais svarstymais. Tad analogija gali būti naudinga ar žalinga. Naudingos analogijos pavyzdys gali būti daugelio planimetrijos teiginių perkėlimas į stereometriją, pvz., jei $S = ab$, tai $V = abc$. Žalinga analogija, pvz., tokia: jei stačiakampio pagrindą 2 kartus padidinsime, o aukštinę 2 kartus sumažinsime, tai jo plotas nepasikeis; tačiau to negalima tvirtinti, jei pagrindą 30 % padidinsime, o aukštinę 30 % sumažinsime.

Būtina įsidėmėti, kad dažnai taikant analogiją mokymo procese, mokinių susidomėjimas matematika sustiprėja, nes tai – įdomi tiriamoji veikla. Be to, tai leidžia lengviau ir tvirčiau įsisavinti mokomąją medžiagą, nes perkeliamos žinios ir mokėjimai, sukaupti žinomoje srityje, į nežinomą sritį – tai kartojimas, kuris yra „mokslų motina". Todėl šia prasme labai naudingi tokio tipo pratimai: 1) Ar teisingas teiginys: „Jei visi trikampio kampai lygūs, tai ir kraštinės lygios"? Suformuluokite analogišką teiginį šešiakampiui. Ar jis teisingas? 2) Ar teisingas teiginys: „Atstumų nuo bet kurio taško, esančio lygiakraščio trikampio viduje (išorėje), iki jo kraštinių suma yra pastovus dydis"? Suformuluokite analogišką teiginį bet kuriam taisyklingajam daugiakampiui. Ar jis bus teisingas?

Ne mažiau svarbu ugdyti mokinių įprotį taikyti analogiją ieškant sunkių uždavinių sprendimo būdų. Apie tai truputį užsiminėme aukščiau, dabar šį patarimą išplėtosime. Rekomenduotinas toks darbo su uždaviniu planas: 1) parinkti analogišką uždavinį, kuriame būtų analogiška sąlyga, tačiau su daug mažesniais skaičiais ar kitaip paprastesnį; 2) išspręsti pagalbinį uždavinį, po to grįžti prie pradinio uždavinio.

Mokytojui reikia žinoti ir tipiškas mokinių klaidas, kurios atsiranda taikant analogiją. Jau pradinių klasių mokiniai turi būti rengiami suvokti tai, kad analogijos būdu gaunamos išvados yra tik tikėtinos ir jas reikia papildomai patikrinti. Pvz., sprendžiant uždavinį: „Onutė turėjo 5 sąsiuvinius – 2 daugiau negu broliukas. Kiek sąsiuvinių turėjo broliukas?“ galima pasinaudoti analogija ir gauti atsakymą „7 sąsiuvinius“, o iš tiesų reikia gauti „3 sąsiuvinius“. Tačiau ir daugelis kitų matematinių klaidų yra neteisingai taikomų analogijų rezultatas. Antai įpratę prie trupmenų prastinimo aritmetikoje mokiniai ima prastinti dėmenis algebroje, pvz.: $\frac{a^2+b}{a} = a + b$ ir pan., ima dauginti tokiais atvejais:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta;\ \lg(a + b) = \lg a + \lg b.$$

Tokios „analogijos“ paaiškinamos formaliomis, netiksliomis, paviršutiniškomis žiniomis. Paprastai tokios žalingos analogijos atsiranda stichiškai, pvz.:

$$\frac{a+b}{c+b} = \frac{a}{c};\quad \sqrt{a^2+b^2} = a+b.$$

Šiais atvejais atsiranda klaidingos analogijos su teisingais pertvarkiais:

$$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c};\quad \sqrt{a^2b^2} = |ab|.$$

Kai kurie pradinių klasių mokiniai įsigudrina dalyti taip: 96 : 16 = 10, nes, anot jų, 90 : 10 = 9, 6 : 6 = 1, taigi 9 + 1 = 10.

Taikant planimetrijoje įgytas žinias stereometrijoje, mokiniai pirmojoje geometrijos dalyje įgytas teisingas žinias antrojoje dalyje kartais pritaiko neteisingai, pvz., teigia: „Jei dvi tiesės erdvėje statmenos trečiajai tiesei, tai jos yra lygiagretės“.

Tačiau netinka laikytis principo „Bijai vilko – neik į mišką“. Analogiją reikia taikyti ten, kur tai būtina. Ypač svarbu taikyti analogiją būtent tarp planimetrijos ir stereometrijos. Antai santykis tarp stačiakampio kraštinių ilgių analogiškas santykiui tarp stačiakampio gretasienio briaunų ilgių. Panašiai įvairias analogijas galima rasti tarp trikampių ir piramidžių, lygiagretainių ir prizmių. Todėl, apibendrinant geometrijos žinias, naudinga duoti spręsti tokį uždavinį: „Išanalizuokite tetraedrą kaip kūną, analogišką planimetrijos sąvokoms: lygiagretainis, stačiakampis, kvadratas, kampo pusiaukampinė“.

Tuo domėtasi dar ikikarinės Nepriklausomos Lietuvos matematikos didaktikoje. Antai Ignas Končius (1886–1975), aptardamas geometrijos loginę sandarą, teigė, kad, remiantis geometrijoje priimtomis pirminėmis sąvokomis ir judėjimo bei matmenų sąvoka, galima sukurti visą elementariosios geometrijos pagrindinių sąvokų sistemą. Jo straipsnyje aptariama geometrijos loginė sandara. Remiantis taško, linijos, paviršiaus ir kūno sąvokomis, galima eiti dviem keliais. Pradedant nuo taško, išsiaiškinama, kad judančio taško pėdsakas yra linija, judančios linijos pėdsakas – paviršius, judančio paviršiaus – kūnas. Taškas neturi matmenų, linija turi vieną, paviršius – du, kūnas – tris. Judančio „bemačio“ pėdsakas – „vienmatis“ dydis, „vienmačio“ – „dvimatis“ ir t. t. Pradedant atvirkščiai – nuo kūno taško link, gaunama: kūno riba – paviršius, paviršiaus – linija, linijos – taškas. Trijų matmenų dydžio riba – dvimatis dydis, dvimačio – vienmatis, vienmačio – bematis. Visa tai galima pritaikyti nusakant planimetrijos ir stereometrijos ryšį. Antai kampas planimetrijoje yra „neribota **plokštumos** dalis, įterpta tarp dviejų iš vieno **taško** išeinančių **tiesiųjų linijų**“ [89, p. 32], o stereometrijoje – „neribota **erdvės** dalis, įterpta tarp dviejų iš vienos **tiesiosios linijos** išeinančių **plokštumų**“ [89, p. 32]. Perkėlus visas pirmojo apibrėžimo sąvokas per vieną tolyn, gaunamas antrasis apibrėžimas: „mokėk iš planimetrijos permesti tiltelį į stereometriją. Tas tiltelis: pakeisk tašką linija, liniją – paviršiumi, paviršių – erdve (kūnu)“ [89, p. 32]. Toliau aptariamas tolesnis „tiltelių permetimas“ iš matematikos į kitus mokslus: fiziką, filosofiją (Benedikto Spinozos (1632–1677) etikos aksiomos ir teoremos).

Ypač įdomi, o kartu ir sukelianti pedagoginių rūpesčių, yra analogija tarp skritulio ir rutulio. Kartais net pradinių klasių mokytojos liepia: „Vaikučiai, nusipieškite po 3 rutuliukus...“. Yra dvi analogiškos teoremos: „Iš visų lygiapločių plokštuminių figūrų mažiausią perimetrą turi skritulys“ ir „Iš visų lygiatūrių erdvinių figūrų mažiausią paviršių turi rutulys“. Vengrų kilmės JAV matematikas Djerdis Poja (*Polia*, 1887–1985) rašo: „net pati gamta nusiteikusi rutulio naudai. Lietaus lašai, muilo burbulai, Saulė, Mėnulis, mūsų Žemė, planetos yra rutulio ar beveik rutulio formos“ [136, p. 187]. Įdomią analogiją D. Poja suranda ir zoologijoje – kada šaltą naktį katinas rengiasi miegui, jis susiraito, darydamas savo kūną kiek galima artimesnį rutulio formai, kad išsaugotų šilumą, kad jos išsiskirtų kuo mažiau.

7. ANALIZĖ IR SINTEZĖ MATEMATIKOJE

Analizė ir sintezė yra labai svarbios matematiniuose tyrimuose, taip pat ir mokant matematikos, kur jos naudojamos kaip uždavinių sprendimo, teoremų įrodymų, matematinių sąvokų savybių nustatymo metodai.

Analizė ir sintezė praktiškai nėra atskiriamos viena nuo kitos, papildydamos viena kitą jos sudaro analizinį – sintetinį metodą. Tačiau kad galėtume išanalizuoti aptarinėjame jas atskirai.

Analizės metodas dėl savo natūralumo dažniau naudojamas samprotaujant, kai reikia nustatyti nežinomą rezultatą, todėl jis labiau tinka tyrimams. Sintezės metodas – darnesnis, tobulesnis. Jis taikomas, kai žmogus žino tiesą ir nori parodyti ją kitiems.

Analizė – mąstymo metodas, kai einama nuo bendro prie atskiro, prie dalių, sintezė – atvirkščiai, nuo atskiro, nuo dalių prie bendro. Vėliau imta analizę suprasti kaip mąstymo būdą, kurį naudojant nuo pasekmių pereinama prie priežasties, o sintezėje nuo priežasties einama prie pasekmių. Renė Dekartas (*Descartes*, 1596–1650) savo knygoje „Logika" analizę ir sintezę pailiustravo genealoginio medžio pavyzdžiu: galima juo eiti nuo šakų prie kamieno ir atvirkščiai. Abiem atvejais du asmenys tame pat medyje yra giminaičiai [44].

To paties uždavinio aritmetinis ir algebrinis sprendimas yra: aritmetinis – sintezė, algebrinis – analizė.

Analize ir sinteze nuolat naudojamasi tiek matematikos elementarioms teorinėms žinioms įgyti, tiek joms taikyti sprendžiant pratimus ir uždavinius. Antai jau nagrinėjant pirmosios dešimties skaičius ir atliekant su jais sudėties ir atimties veiksmus mokiniai naudojasi vaizdine veikiančiąja analize ir sinteze: daiktų aibės išskirstomos į jas sudarančius elementus arba tie elementai grupuojami. Atliekant sudėtį, pridedant po vienetą ar vienetų grupę, pradžioje naudojamas vaizdumas ir taikoma aukščiau minėtoji vaizdi analizė bei sintezė. Po to ši analizė bei sintezė atliekama jau vaiko vaizduotėje, nes konkretūs veiksmai su konkrečiais daiktais išlieka vaiko atmintyje ir gali būti atgaminti jo sąmonėje. Paskui pereinama prie dar aukštesnės analizės ir sintezės formos – protinės, kuri jau atliekama vidinio mąstymo kalbos forma.

Jau spręsdami vienaveiksmius uždavinius vaikai irgi turi naudotis analize ir sinteze. Pvz., sprendžiant uždavinį: „Nuo vienos šakelės vaikas nuskynė 5 vyšnias, o nuo kitos – 3 vyšnias. Kiek vyšnių jis nuskynė?", iš pradžių analizuojama jo sąlyga: išskiriami skaitiniai duomenys, uždavinio sąlygoje aptarti vaiko veiksmai ir klausimas. Atsakant į jį, atliekama sintezė. Sprendžiant sudėtinius aritmetinius uždavinius, analizė ir sintezė tampa sudėtingesnės. Vienaveiksmiame uždavinyje paprastai yra du duomenys. Sudėtiniame uždavinyje duomenų yra daugiau. Tenka juos jungti poromis ir surasti pirmąją porą, kad būtų galima gauti pirmąjį klausimą – paprastąjį uždavinį, kurio atsakymas ir kuris nors dar nepanaudotas duomuo iškels antrąjį klausimą – kitą paprastąjį uždavinį, ir t. t.

8. INTUICIJA, FANTAZIJA IR HARMONIJOS JAUSMAS MOKANT MATEMATIKOS

Matematinis mąstymas apima ne tik loginius samprotavimus, bet ir matematinę *intuiciją* (lot. *„intuitio"* – nuojauta), *fantazija* (gr. *„phantasia"* – vaizdinys, vaizduotė) ir *harmonijos* (gr. „harmonia" – darna) jausmas, leidžiantys numatyti uždavinio sprendimo ar teoremos įrodymo eigą. Intuicija – gebėjimas stebėti mintimis, išugdytas daugkartine patirtimi. Tačiau, kaip rašo L. Kudriavcevas, matematikoje

„intuityvūs numatymai ir į tiesą panašūs svarstymai atiduodami šalto nagrinėjimo teismui, kad visa tai išnagrinėtume, įrodytumėme ar paneigtume“ [130, p. 91], teiginio teisingumas įrodomas „ne jo patikrinimu daugeliu pavyzdžių, daugkartiniais eksperimentais – tai matematikoje neturi įrodomosios galios, o grynai loginiu keliu, taikant formaliosios logikos dėsnius“ [130, p. 91]. Matematikos mokymo procese ,,naudojimasis žiniomis, matematiniu aparatu, intuicija, harmonijos pojūčiu, fantazija, mokėjimu galvoti, logika, eksperimentu vyksta ne nuosekliai, etapais – visa tai vyksta visam tam tarpusavyje sąveikaujant viso proceso metu“ [130, p. 2]. Toji sąveika padeda moksleiviams suformuoti matematinę kultūrą. Taigi dedukcijos ir indukcijos vienovė mokant matematikos pasireiškia itin ryškiai, nes pati matematika ryškiai skiriasi nuo gamtos ar visuomenės mokslų tiek įrodymo metodais, tiek jos žinių perdavimo metodika.

9. APIBENDRINIMAS IR ABSTRAKCIJA MATEMATIKOJE

Matematikos mokymo procese mokiniai įgyja gebėjimą sutrumpinti matematinį svarstymą spręsdami jau išmokto tipo uždavinius: daugelį kartų sprendžiant vieno tipo uždavinius atskiri mąstymo proceso etapai sutrumpinami, jie automatizuojasi, bet, jei reikia, tai mokinys gali grįžti prie viso svarstymo. Svarstymo proceso sutrumpinimas įvyksta per pratybas. Gabūs matematikai vaikai greitai pereina prie svarstymų sutrumpinimo, vidutinių gabumų vaikai – lėčiau, o negabūs net ir po daugelio pratybų to padaryti negali.

Nagrinėdamas moksleivių matematinių gabumų struktūros komponentus, V. Kruteckis išanalizavo [129] matematikos mokslininkų, vidurinių mokyklų matematikos mokytojų nuomones šiuo klausimu. Apie 38 % jų svarstymų sutrumpinimą akcentavo kaip vieną iš gabumų matematikai požymių. Beveik visi apklaustieji matematikos mokytojai (98 %) išskyrė gebėjimą apibendrinti.

Apibendrinimas – tai mintyse atliekamas išskyrimas, fiksavimas kokių nors bendrųjų esminių savybių, priklausančių tiktai tam tikrai objektų ar santykių klasei. *Abstrakcija* – tai mintyse atliekamas bendrų esminių savybių, išskirtų apibendrinimo procese, atskyrimas nuo kitų neesminių mūsų nagrinėjamos objektų ar santykių klasės savybių ir šių neesminių savybių atmetimas. Taigi šie loginiai procesai pažinime taikomi praktiškai kartu.

Empirinė medžiaga, nagrinėjama siekiant suformuoti naują sąvoką, turi būti parenkama taip, kad būtų galima apibendrinti, išryškinti esmines savybes, sudarančias formuojamos sąvokos turinį. Ši medžiaga greta esminių duotosios sąvokos savybių privalo turėti ir neesminių savybių. Kad padėtume išskirti esmines savybes ir jas ateityje atskirtume nuo neesminių, pastarąsias reikia varijuoti. Apibendrinimas ir abstrakcija padeda matematiškai apdoroti empirinę medžiagą, tačiau išskiriamos jų procese matematinės sąvokos lieka dar logiškai nesutvarkytos.

10. HIPOTEZIŲ TAIKYMAS MOKYMO PROCESE

Hipotezių reikšmė pažinimui yra labai didelė. Mokslo dėsniai, teorijos iki juos patvirtinant perėjo hipotezių stadiją. Todėl mokytojas, aiškindamas kokią nors teoriją, turi papasakoti ir apie visas šios teorijos vystymosi stadijas. Hipotezės – vienintelis kelias, kuriuo didieji mokslo žmonės atėjo prie pačių svarbiausių mokslo tiesų atradimo.

11. SKYRIAUS APIBENDRINIMAS

Jau pradiniame matematikos mokymo etape yra labai plačios galimybės mokinių loginiam mąstymui ugdyti. Pradines matematikos žinias vaikai įsisavina kaip tam tikrą sistemą, kurioje atskiri teiginiai logiškai susiję tarp savęs, išplaukia vieni iš kitų. Aišku, ši sistema yra pritaikyta prie vaikų mąstymo lygio. Sąmoningai mokydamiesi matematikos, mokiniai naudojasi jiems prieinamu lygiu pagrindinėmis mąstymo operacijomis: analize ir sinteze, lyginimu, abstrahavimu ir konkretizavimu, apibendrinimu. Jie daro indukcines išvadas, bando naudotis dedukciniais samprotavimais. Sąmoningas matematikos žinių įsisavinimas vysto loginį mokinių mąstymą. Antra vertus, mąstymo operacijų įvaldymas savo ruožtu padeda mokiniams sėkmingiau įsisavinti naujas matematikos žinias.

Mokant matematikos, kaip ir visų kitų mokomųjų dalykų, reikia siekti, kad mokiniai kaip galima daugiau matematinių tiesų surastų patys, kad kuo geriau būtų panaudojama jų iniciatyva, būtų skatinami ieškojimai, kūrybiškumas, aktyvumas, taip būdingas vaikams. Tokiu būdu įgytos žinios bus labiau pagrįstos, tvirtesnės, mokiniai pradės domėtis matematika, pamils ją. Tad, pvz., nepilnąją indukciją reikia taikyti, ypač jaunesniosiose klasėse, kaip esminę euristinio mokymo metodo dalį, nes ji suteikia galimybę mokiniams atrasti ir formuluoti jiems naujus matematinius teiginius. Pvz., su vaizdinėmis priemonėmis, o po to ir be jų vaikai atlieka pratimus ir, jau besimokydami pirmosios dešimties skaičių bei veiksmų su jais, įsisavina pirmąjį matematikos dėsnį: $a + b = b + a$ ir jį sėkmingai taiko, kai reikia prie mažesnio skaičiaus pridėti didesnį, pvz., $3 + 5 = 5 + 3$. Lyginant daromi ir apibendrinimai. Taip gaunamos skaičių, geometrinių figūrų, aritmetinių veiksmų ir uždavinių sprendimo būdų savybės. Indukcijos taikymas skatina taikyti ir kitus metodus: stebėjimus, nesudėtingus eksperimentus. Mokiniai turi pastebėti tai, kas yra esminga, bendra, atmesti neesmines savybes, analizuoti, o analizę neišvengiamai lydės sintezė (nes tai, ką pastebime esant bendrą – jau sintezė). Mokiniai formuluoja indukciniu keliu griežtą teiginį, o tai jau dedukcija, nes šį teiginį tuoj pat taiko daliniams atvejams, uždaviniams spręsti ir pratimams atlikti. Dažnai indukciniu keliu suformuluotą teiginį reikalaujama įrodyti (vyresniosiose klasėse). Taigi nepilnoji indukcija mokymo procese lemia visą seriją ją lydinčių metodų.

Tačiau matematika – dedukcinis mokomasis dalykas, todėl ir mokykloje dedukcija turi užimti reikiamą vietą. Ypač padidėja jos svarba vidurinėse ir aukštesniosiose klasėse. Todėl nereikia nepilnąja indukcija piktnaudžiauti ir taikyti ją ten, kur jos nebereikia.

Vidurinėse klasėse nepilnoji indukcija naudojama, kur tai būtina, kaip metodas, kuris yra pradinis formuluoti naujiems teiginiams. Tačiau jau VII klasės mokiniai savo protine branda yra pasiekę tokį lygį, kad dažnai jiems nėra per sunku taikyti dedukcinį metodą, taigi reikia juo naudotis kuo dažniau. Vyresniosiose klasėse indukcija naudojama dar rečiau. Tačiau ir čia nereikia jos visiškai atsisakyti.

IV. MATEMATINIAI TEIGINIAI

1. SPRENDINIAI

Mąstyme sąvokos nevartojamos atskirai viena nuo kitos, jos tam tikrais būdais yra susietos viena su kita. Sąvokų ryšio formos yra *sprendiniai*. Kiekviename sprendinyje nustatomas atitinkamas sąryšis tarp sąvokų. Jei sprendiniai teisingai atspindi tą sąryšį, tai tokius sprendinius vadiname *teisingais*, priešingu atveju jie *klaidingi*. Pvz.: „Visi stačiakampiai – lygiagretainiai“ (teisingas sprendinys); „Visi lygiagretainiai – stačiakampiai“ (klaidingas sprendinys).

Taigi sprendinys yra tokia mąstymo forma, kurioje atspindimas paties objekto buvimas ar nebuvimas, taip pat objekto savybių buvimas ar nebuvimas. Taikant logikoje priimtą simboliką ir sprendinių klasifikaciją, turime keturias sprendinių rūšis: 1) ***a*** (*bendrieji teigiamieji sprendiniai*). Pvz.: „Funkcijos $y = kx$ grafikas – tiesė, einanti per koordinačių pradžią“; 2) ***i*** (*daliniai teigiamieji sprendiniai*). Tinka tas pats pavyzdys, tik vietoje k reikia paimti konkretų skaičių; 3) ***e*** (*bendrieji neigiamieji sprendiniai*). Pvz.: „Nei vienas racionalusis skaičius nėra lygties $x^2 = 2$ šaknis“; 4) ***o*** (*dalinis neigiamasis sprendinys*). Pvz.: „Skaičius 10 nėra lygties $2x = 13$ šaknis“.

Pažinimo procese sprendiniai *i* ir *o* yra pirmesni už sprendinius *a* ir *e*, nes pirmieji yra eksperimentų, stebėjimų rezultatas, o antrieji gaunami juos apibendrinus. Loginio kvadrato taikymo pavyzdžiai – jei eksperimento metu suformuluojame: a) teisingą sprendinį *i*, automatiškai jam priešingą sprendinį *e* atmetame – jis bus klaidingas: b) teisingą sprendinį *o*, tai automatiškai atmetame *a* (t. y. norint paneigti kurį nors teiginį, pakanka vieno neigiamo pavyzdžio). Daugelis matematinių teiginių yra *a* ir *e* tipo. Iš jų teisingumo išplaukia jiems subordinuotų teiginių *i* (*o*) teisingumas, o kad teiginiai *a* (*e*) teisingi esant teisingiems teiginiams *i* (*o*) – ne visada galima tvirtinti. Teiginių *a* (*e*) teisingumas arba *postuluojamas* (lot. *„postulatum“* – reikalavimas), arba *įrodomas*, tada šie teiginiai tampa *teoremomis*.

Matematiniai sprendiniai gali būti klasifikuojami ir taip: 1) *teigiantieji* ($5 = 4 + 1$) ir *neigiantieji* ($5 \neq 4$) sprendiniai; 2) *vieniniai* ($2 + 3 = 3 + 2$), *daliniai* ($5 = 5$) ir *bendrieji* ($a + b = b + a$) sprendiniai; 3) *sąlyginiai* („Jei trikampio trys kraštinės atitinkamai lygios kito trikampio trims kraštinėms, tai tie trikampiai yra lygūs“), *skirstantieji* („Tiesinė lygtis su realiais koeficientais turi arba vieną šaknį, arba be galo daug šaknų, arba neturi nei vienos šaknies“) ir *kategoriškieji* (gr. *„katēgoria“* – nurodymas, apibrėžimas) („Trikampio priekampis yra didesnis už bet kurį, jam negretutinį, vidaus kampą“) sprendiniai; nesunku pastebėti, kad tai jau sudėtiniai teiginiai, sudaryti iš paprastųjų teiginių; 4) *galimumo* (*probleminiai*) sprendiniai („Matyt, tiesė *a* yra statmena tiesei *b*“); 5) *realieji* (*asertoriniai*, lot. *„assertorius“* – teigiamas) sprendiniai („Lygiakraščio trikampio kampas lygus 60°“); 6) *būtinumo* (*apodiktiniai*, gr. *„apodeiktikos“* – nenuginčijamas, būtinas) sprendiniai („Sumažinus vienetu bet kurio nelyginio skaičiaus kvadratą, gausime skaičių, kuris dalysis iš 8“). 4 – 6 tipų sprendiniai yra modalinių teiginių atmainos.

Vieninių ir bendrųjų sprendinių skyrimas ypač svarbus geometrijoje. Čia įrodant teoremas visada naudojamas brėžinys (vieninis pavyzdys), o įrodoma teorema remiasi ne individualiomis, o bendromis figūrų savybėmis.

Mąstyti – reiškia formuluoti sprendinius. Sprendiniais mintis, sąvoka gali būti vystomos toliau. Kadangi bet kuri sąvoka atspindi atitinkamą objektų ar reiškinių klasę (aibę), arba santykius tarp jų, tai bet kuris sprendinys gali būti nagrinėjamas, kaip vienos sąvokos subordinacija (arba neįtraukimas) į kitos sąvokos turinį bei apimtį.

Kiekvienas mokslas – apibrėžta sprendinių sistema apie objektus, kuriuos jis nagrinėja. Bet kuris sprendinys išreiškiamas tiesioginiu sakiniu, išreikštu to mokslo terminais ir simboliais. Taigi ir matematika yra tam tikra sprendinių sistema. Matematiniai sprendiniai yra išreiškiami matematiniais ir loginiais terminais bei simboliais. Matematikos terminai (ar simboliai) žymi logines operacijas, kurias atliekant iš vienų matematinių sprendinių gauname kitus. Visų tokių sprendinių aibė sudaro matematikos mokslą.

Beje, sprendiniai logikoje yra ne kas kita, kaip paprastieji teiginiai. Tad ateityje vartosime tik teiginio terminą.

2. PAGRINDINĖS MATEMATINIŲ TEIGINIŲ RŪŠYS

Aksioma – teiginys, priimamas be įrodymo. Tam tikras aksiomų skaičius sudaro pradinių kurios nors mokslinės teorijos teiginių sistemą, kurios pagrindu įrodomi kiti šios teorijos teiginiai – teoremos. Aksiomos ir pirminės, neapibrėžiamos sąvokos sudaro matematinės teorijos pagrindą. Aksiomų sistema turi tenkinti *nepriklausomumo*, *neprieštaringumo* ir *pilnumo* reikalavimus.

Postulatas – teiginys, kuris išreiškia tam tikrą reikalavimą (sąlygą), kurį (-ią) privalo tenkinti tam tikra sąvoka ar santykis tarp sąvokų. Kartais postulatai būna sąvokos ar sąvokų sistemos apibrėžimo dalis. Pvz., *ekvivalentumo* santykis apibrėžiamas trimis postulatais. Paaiškinsime tai lygybės santykiu. Lygybės santykis aibėje A bus ekvivalentus, jei: a) jis bus *refleksyvus* (lot. *„reflexio“* – atgręžimas), t. y. $\forall a \in \mathrm{A}$ turime $a = a$; b) jis bus *simetriškas* (gr. *„symmetria“* – atitikimas), t. y. $\forall a, b, c \in \mathrm{A}$ turėsime $a = b \to b = a$; c) jis bus *tranzityvus* (lot. *„transityvus“* – pereinamasis), t. y. $\forall a, b, c \in \mathrm{A}$ turėsime $a = b \wedge b = c \to a = c$. Analogiškai dviejų tiesių lygiagretumas ($a \,||\, b$) apibrėžiamas dviem postulatais:

1) $a \in \alpha \wedge b \in \alpha$; 2) $a \parallel b \wedge a \cap b = \varnothing$.

Matematiniai teiginiai, sudarantieji bet kurios matematikos šakos turinį, nėra izoliuoti, bet glaudžiai siejasi vienas su kitu ir sudaro darnią sistemą. Norint sukurti tobulą bet kurio mokslo sistemą, kurios idealą buvo bendrais bruožais nusakę dar senovės graikai, ir kuri galutines savo formas įgijo tik XX a., jos pagrindu imamas tam tikras kiekis pagrindinių terminų, sąvokų ir aksiomų. Visa tai atskleidžia pagrindinių sąvokų turinį, netiesiogiai tas sąvokas apibrėžia. Po to mokslo sistemos vystymas eina dedukciniu keliu. Kiekviena nauja sąvoka nustatoma atitinkamu apibrėžimu, pagrįstu pagrindinėmis sąvokomis ir tais apibrėžimais, kurie buvo pateikti anksčiau. Kiekvienas naujas teiginys įrodomas. Taigi kiekviena konkretaus mokslo sąvoka arba yra pagrindinė, netiesiogiai apibrėžta aksiomomis, arba apibrėžiama; trečio kelio nėra. Kiekvienas teiginys yra arba priimtas kaip aksioma, arba įrodytas, kaip teorema – čia trečio kelio irgi nėra (taigi pasireiškia loginis negalimo trečiojo dėsnis).

Kaip jau minėta, aksiomų sistema turi tenkinti šiuos reikalavimus: 1) aksiomos turi būti suderintos (neprieštaraujančios viena kitai; tas pats pasakytina ir apie jomis naudojantis įrodomas teoremas); 2) aksiomos turi būti viena nuo kitos nepriklausomos (t. y. nei viena neturi būti išvedama iš kitų, tokiu atveju tai būtų jau teorema); 3) aksiomų sistema turi būti pilna, t. y. aksiomų turi pakakti visoms atitinkamos mokslo šakos teoremoms įrodyti. Tačiau griežtas bet kurio matematikos dalyko dėstymas vidurinėje mokykloje yra per sunkus mokiniams. Mokykloje dažniausiai griežtai nesilaikoma aksiomų sistemos nepriklausomumo ir pilnumo reikalavimų.

Svarbus matematikos, kaip dedukcinės sistemos, bruožas – visos sąvokos, išskyrus pagrindines, įvedamos apibrėžimais. Apibrėžimuose nurodomos kai kurios specifinės sąvokų savybės, požymiai, pagal kuriuos galima nustatyti, ar duotasis objektas ar santykis priklauso šios sąvokos apimčiai. Likusios apibrėžiamųjų sąvokų savybės nustatomos teoremomis. Sąvokų požymiai, išreikšti teoremomis bei apibrėžimais, paprastai yra elementarūs sudėtiniai teiginiai, sudaryti iš dviejų paprastųjų teiginių, sujungtų loginėmis jungtimis. Apibrėžimuose ir kiekvienos teoremos sąlygoje nustatomas atitinkamos sąvokos egzistavimo pakankamumas. Visi požymiai čia jungiami jungtimi „ir“, t. y. turime *konjunkciją*. Todėl tam, kad nustatytume, ar atitinkamas objektas (santykis) priklauso kokiai nors objektų (santykių) klasei, sudarančiai atitinkamos sąvokos apimtį, pakanka parodyti, kad visi jos požymiai atskleidžiami jos apibrėžime ar kurios nors teoremos sąlygoje. Ypač tai aktualu sprendžiant uždavinius.

Jeigu kuri nors matematinė sąvoka turi vieną ar kelis apibrėžimus ir yra išnagrinėtos teoremos, kurios nustato pakankamas jos egzistavimo sąlygas, tai požymių, esančių apibrėžimuose ir teoremose konjunkcijos sudaro *disjunkciją*. Taip gaunamas išplėstinis sąvokos apibrėžimas. Pvz.: keturkampis ABCD bus lygiagretainis (p), jeigu: 1) $AB \parallel CD$ (q) ir $AD \parallel BC$ (r), arba 2) $AB \parallel CD$ (q) ir $AB = CD$ (s), arba 3) $AB = CD$ (s) ir $AD = BC$ (t), arba 4) $AO = OC$ (u) ir $BO = OD$ (v) ir O – įstrižainių AC ir BD susikirtimo taškas (z). Trumpai tai užrašoma taip:

$$((q \wedge r) \vee (q \wedge s) \vee (s \wedge t) \vee (u \wedge v \wedge z)) \sim p.$$

Matematikos mokymo procese tikslinga kuo dažniau taikyti tokias konstrukcijas: taip nustatomas organinis ryšys tarp sąvokos savybių, matomų apibrėžime, su kitomis savybėmis, atspindėtomis teoremose. Taip mokiniai apibendrina savo žinias, praplečia jų apimtį, taip pat ir jų taikymo galimybes. Todėl nagrinėjant sąvokų apibrėžimus, aksiomas ir teoremas, rekomenduojama sudaryti su mokiniais nuolat papildomus sąrašus savybių, iš kurių galima sudaryti aukščiau minėtus išplėstinius apibrėžimus. Be nagrinėjamos medžiagos loginio organizavimo pateiktoji darbo su sąvokomis ir teoremomis metodika matematinės teorijos mokymąsi daro labiau organizuotą ir natūralų. Jei mokytojas laikosi tokios metodikos, jo mokiniai lauks, kad, įvedus naują sąvoką bei jos apibrėžimą, bus nagrinėjamos tos jų savybės, kurios kartu su apibrėžimu leis atpažinti šią sąvoką naujoje situacijoje, taip pat panaudoti tas šios situacijos savybes, kurios nustatomos prieš tai nustačius minimos sąvokos buvimą joje. Taip apibrėžimai bei teoremos mokiniams pateikiami vieninga, tarpusavyje susieta sistema, o ne kaip atsitiktinai sudarytas teiginių rinkinys.

3. TEOREMOS SĄVOKA. PAPRASTOS IR SUDĖTINĖS TEOREMOS

Pagrindinės sąvokos, jų sąryšiai ir aksiomų sistema – dedukcinės disciplinos sukūrimo pagrindai.

Teorema – pagrindinė dedukcinės sistemos grandis, kuri įtraukiama į tą sistemą logiškai ją pagrindus, įrodžius. Tokią teoremą, kuri labai lengvai įrodoma per kitą, ką tik įrodytą teoremą, vadiname *išvada*. Dažnai išvada yra kurios nors teoremos atskiras atvejis. *Lema* – teorema, kuri įrodoma kaip pagalbinė kitai teoremai įrodyti. Kiekvienos teoremos formuluotėje nurodoma, kokioms sąlygoms esant nagrinėjamas matematinis objektas ar objektų sąryšis ir kas apie tą objektą (sąryšį) tvirtinama. Todėl dažnai teoremos formuluojamos kaip *implikaciniai* teiginiai, po jungties dalies „jei“ nurodant *sąlygą*, o po dalies „tai“ – *išvadą*. Pvz.: „Jei skaičius baigiasi 0 ar 5, tai jis dalijasi iš 5“. Kartais teoremos pateikiamos kaip tvirtinimai: „Kryžminiai kampai yra lygūs“. Tačiau tokias teoremas irgi nesunku išreikšti implikaciniu teiginiu.

Mokykloje teoremos sąvoka tradiciškai įvedama geometrijos kurse. Tačiau ir aritmetikoje bei algebroje naudojamasi teoremomis, kurios dažniausiai neįrodinėjamos, bet aiškinamos nepilnosios indukcijos metodu.

Pagal sąlygų ir išvadų kiekį teoremos skirstomos į *paprastas* ir *sudėtingas*. Paprastosios teoremos pavyzdys: „Jei skaičius baigiasi nuliu, tai jis dalijasi iš 10“. Sudėtingų teoremų pavyzdžiai: „Jei skaičius dalijasi iš 3 ir 5, tai jis dalijasi iš 15“; „Rombo įstrižainės tarpusavyje statmenos ir jo kampus dalija pusiau“. Pastarąją teoremą galima išreikšti dviem paprastosiomis teoremomis (nes čia yra dvi išvados).

Pati žodinė teoremų išraiška yra dvejopa: a) *kategoriška*, kada kokios nors savybės buvimas ar nebuvimas tvirtinamas besąlygiškai („Trikampio vidaus kampų didumų suma lygi 180°“); b) *sąlyginė*, kai teiginio teisingumas laikomas priklausomu nuo atitinkamų sąlygų („Jei dvi tiesės yra simetriškos centro atžvilgiu, tai jos – lygiagretės“). Aišku, kad nepakeitus šių teoremų turinio, formą pakeisti galima: „Jei figūra yra trikampis, tai jo vidaus kampų suma lygi 180°“; „Dvi tiesės, simetriškos centro atžvilgiu, yra lygiagretės“.

4. PAPRASTŲJŲ TEOREMŲ RŪŠYS

Paprastoji teorema gali būti išreikšta implikacija: „Jei yra p, tai yra ir q“ ($p \to q$). Jei šią teoremą laikysime *tiesiogine*, tai *atvirkštinė* teorema bus implikacija $q \to p$. Jei paneigtume tiesioginės ir atvirkštinės teoremų sąlygas ir išvadas, tai gautume teoremas, priešingas joms: $\overline{p} \to \overline{q}$, $\overline{q} \to \overline{p}$. Taip sakant, kad ir kokia įvairi būtų matematinių teiginių žodinė forma, juos visada galima išreikšti implikacija. Iš vieno teiginio gaunami dar trys teiginiai:

1. „Jei yra q, tai yra ir p“ (teiginys, atvirkštinis pirmajam).
2. „Jei nėra p, tai nėra ir q“ (teiginys, priešingas pirmajam).
3. „Jei nėra q, tai nėra ir p“ (teiginys, priešingas antrajam arba atvirkštinis trečiajam).

Nesunkiai galima įrodyti, kad: 1) tiesioginė ir priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalenčios; 2) atvirkštinė ir priešinga tiesioginei teoremos taip pat ekvivalenčios.

Ne visada iš tiesioginės teoremos teisingumo išplaukia atvirkštinės ir priešingosios teoremų teisingumas. Kad įsitikintume visų keturių teoremų teisingumu, nebūtina įrodyti kiekvieną iš jų, o pakanka įrodyti tik dvi: tiesioginę ir atvirkštinę arba tiesioginę ir priešingąją. Visa tai tinka tik paprastosioms teoremoms. Pateikiame pora pavyzdžių, kuriuose visos keturios teoremos yra teisingos : I. 1) Jei keturkampis yra lygiagretainis, tai jo įstrižainės susikirsdamos dalijasi pusiau. 2) Jei keturkampio įstrižainės susikirsdamos dalijasi pusiau, tai tas keturkampis – lygiagretainis. 3) Jei keturkampis ne lygiagretainis, tai jo įstrižainės susikirsdamos nesidalija pusiau. 4) Jei keturkampio įstrižainės susikirsdamos nesidalija pusiau, tai toks keturkampis – ne lygiagretainis. II. 1) Jei keturkampis yra lygiagretainis, tai jo priešingosios kraštinės poromis yra lygios. 2) Jei keturkampio priešingosios kraštinės poromis yra lygios, tai tas keturkampis – lygiagretainis. 3) Jei keturkampis nėra lygiagretainis, tai jo priešingosios kraštinės nėra poromis lygios. 4) Jei keturkampyje priešingosios kraštinės poromis nėra lygios, tai tas keturkampis – ne lygiagretainis. Tačiau taip būna ne visada:

1) Jei kampai yra kryžminiai, tai jie yra lygūs (tiesioginė teorema teisinga).

2) Jeigu kampai lygūs, tai jie kryžminiai (atvirkštinė teorema neteisinga).

3) Jeigu kampai ne kryžminiai, tai jie nelygūs (priešingoji teorema neteisinga).

4) Jeigu kampai nelygūs, tai jie ne kryžminiai (atvirkštinė priešingajai teorema teisinga).

Iš šio pavyzdžio išplaukia, kad: a) gali būti, jog esant teisingai tiesioginei teoremai atvirkštinė teorema bus klaidinga; b) jei tiesioginė teorema teisinga, tai teorema, atvirkštinė priešingajai irgi bus teisinga; c) jei atvirkštinė teorema neteisinga, tai neteisinga ir priešingoji teorema. Šios savybės – ne atsitiktinės. Tarp šių keturių teoremų egzistuoja glaudus ryšys: a) $p \to q$ ir $\overline{q} \to \overline{p}$ yra kartu teisingos arba klaidingos; b) $q \to p$ ir $\overline{p} \to \overline{q}$ taip pat yra kartu teisingos arba klaidingos. Tai galima įrodyti, t. y. parodyti, kad:

$$1)\ (p \to q) \sim (\overline{q} \to \overline{p});\quad 2)\ (q \to p) \sim (\overline{p} \to \overline{q}).$$

12 lentelėje pateiktas (2) lygybės įrodymas.

12 lentelė

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$q \to p$	$\overline{p} \to \overline{q}$	$(q \to p) \sim (\overline{p} \to \overline{q})$
t	t	k	k	t	t	t
k	k	t	t	t	t	t
t	k	k	t	t	t	t
k	t	t	k	k	k	t

Teoremų sąryšis labai palengvina jų mokymosi praktiką. Nagrinėjant matematinių objektų savybes, kurios išreiškiamos teoremomis, nėra reikalo nagrinėti visas keturias teoremų rūšis – pakanka nustatyti kurios nors neekvivalenčios teoremų poros (dažniausiai tiesioginės ir atvirkštinės teoremų) teisingumą ar klaidingumą, nes iš tokios poros teoremų teisingumo ar klaidingumo būtinai išplaukia likusios poros teisingumas ar klaidingumas.

Labai svarbu atkreipti mokinių dėmesį į tai, kada teisingos yra tiesioginė ir atvirkštinė (tiesioginė ir priešingoji) teoremos. Tokio atvejo pavyzdys: „Lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau“. Atvirkštinė teorema patvirtina, kad lygiagretainis yra vienintelis iš iškiliųjų keturkampių, turintis tokią įstrižainių savybę. Tad nagrinėjama įstrižainių savybė yra vienas iš lygiagretainio požymių – jo *charakteringoji* (gr. *„charaktēr“* – bruožas) savybė. Taigi tiesioginės ir atvirkštinės (arba tiesioginės ir priešingosios) teoremų teisingumas išskiria objekto ar objektų sąryšio charakteringąją savybę. Pvz.: 1) Aritmetinės progresijos atveju charakteringąją jos savybę išskiria tiesioginė teorema: „Bet kuris aritmetinės progresijos narys, išskyrus pirmąjį, yra jam gretimų narių aritmetinis vidurkis“ (galioja ir atvirkštinė teorema). 2) Geometrinės progresijos atveju charakteringąją savybę nusako teorema: „Bet kuris geometrinės progresijos narys, išskyrus pirmąjį, yra jam gretimų narių geometrinis vidurkis“ (galioja ir atvirkštinė teorema).

Kartais charakteringoji savybė išreiškiama apibrėžimu ir teorema. Pvz., trikampių lygumas apibrėžiamas tuo, kad juos visais jų elementais galima sutapdinti tarpusavyje. Įrodoma ir teorema – trečiasis trikampių lygumo požymis – apie trikampių lygumą, jei jie turi atitinkamai po tris lygias kraštines.

Charakteringųjų savybių nustatymas leidžia pakeisti vienus objektų apibrėžimus kitais, jiems ekvivalenčiais, o tai kartais patogu įrodymuose. Pvz., lygiagretainį galima apibrėžti kaip iškilųjį keturkampį, kurio priešingosios kraštinės poromis yra lygios, arba kaip iškilųjį keturkampį, kurio įstrižainės susikirtimo taške dalijasi pusiau.

5. BŪTINOS IR PAKANKAMOS SĄLYGOS

Prieš įvedant būtinų ir pakankamų sąlygų sąvokas, būtina pirminį supažindinimą su jomis pradėti jau pradinėse klasėse. Čia tiks tokie pavyzdžiai: 1) Kad asfaltas gatvėje taptų drėgnas, tai būtina (pakanka), kad palytų. 2) Ar šios sąlygos bus būtinos, pakankamos, būtinos ir pakankamos (abi kartu): a) pinigų turėjimas bilietui į kiną nusipirkti: b) 16 metų turėjimas gauti Lietuvos piliečio pasui.

Jau pradinėse klasėse reikia išmokyti skirti pagal prasmę terminus: „gali“ ir „reikia“, kurie yra atitinkamų žodžių: „pakanka“ ir „būtina“ sinonimai. Pvz., kokiu terminu („galima“ ar „reikia“) reikia formuluoti savybes, taikomas šiuose skaičiavimuose: a) $58 - (28 - 19) = (58 - 28) + 19 = 49$; b) $46 - (25 - 14) = (46 + 14) - 25 = 35$.

Klausimas apie būtiną ir pakankamą požymius (sąlygas) siejasi su tiesiogine ir atvirkštine (ar priešinga) teoremomis. Matematikoje yra teoremų, kuriose yra *būtinos*, *pakankamos* ir *būtinos bei pakankamos* sąlygos. Pvz.: „Iš 3 dalijasi tie ir tik tie skaičiai, kurių skaitmenų suma dalijasi iš 3“. Čia „skaitmenų suma dalijasi iš 3“ yra būtina sąlyga. Todėl būtina sąlyga yra ta, kurios nesant tvirtinimas būtų klaidingas. Pakankama sąlyga yra tokia, kuriai esant teiginys yra būtinai teisingas. Pvz., kad skaičius dalytųsi iš 2, pakanka, kad jis dalytųsi iš 4. Būtina sąlyga gali būti nepakankama, nes, pvz., to, kad skaičius dalijasi iš 2, nepakanka, kad jis dalytųsi 4. Taip pat pakankamas požymis gali nebūti būtinas. Pvz., dalijimasis iš 4 – pakankamas dalijimosi iš 2 požymis, bet jis nėra būtinas. Jei abu teiginiai $p \to q$ ir $q \to p$ teisingi, t. y. $p \sim q$, tai q yra ir būtinas, ir pakankamas p požymis. Iš to, kad skaičius dalijasi iš 3, išplaukia jo skaitmenų sumos dalumas iš 3 ir atvirkščiai, todėl aukščiau pateiktą teiginį galima suformuluoti taip: „Kad skaičius dalytųsi iš 3, būtina ir pakanka, kad jo skaitmenų suma dalytųsi iš 3“. Būtinos ir pakankamos sąlygos yra charakteringasis požymis.

Apibendrinsime tai, kas pasakyta, pasinaudodami logikos simbolika. Tarkim, turime teisingus teiginius:

1) Jei natūralusis skaičius yra lyginis, tai jis dalijasi iš 12.
2) Jei natūralusis skaičius dalijasi iš 12, tai jis lyginis.
3) Jei natūralusis skaičius lyginis, tai jis dalijasi iš 2.
4) Jei natūralusis skaičius dalijasi iš 2, tai jis lyginis.

Tai implikaciniai teiginiai: 1) $p \to q$; 2) $q \to p$; 3) $r \to s$; 4) $s \to r$. Kiekvieną jų galima suformuluoti ir taip:

1) Kad natūralusis skaičius dalytųsi iš 12, būtina (bet nepakankama), kad jis būtų lyginis.
2) Kad natūralusis skaičius būtų lyginis, pakanka (bet nebūtina), kad jis dalytųsi iš 12.
3) Kad natūralusis skaičius dalytųsi iš 2, būtina ir pakanka, kad jis būtų lyginis.
4) Kad natūralusis skaičius dalytųsi iš 2, būtina ir pakanka, kad jis būtų lyginis.

Sakoma, kad teiginys q yra būtina teiginio p teisingumo sąlyga, o teiginys p yra teiginio q teisingumo pakankama sąlyga. Teiginys r yra būtina ir pakankama teiginio s teisingumo sąlyga, ir atvirkščiai.

Bendru atveju teiginį p vadiname būtina teiginio q teisingumo sąlyga, jei implikacija $q \to p$ yra teisinga. Teiginį p vadiname pakankama teiginio q teisingumo sąlyga, jei implikacija $p \to q$ yra teisinga.

Sąlyga yra būtina ir pakankama q teisingumui, jei teisingos implikacijos $p \to q$ ir $q \to p$, t. y. jei galioja ekvivalentumas $p \sim q$.

Taigi išsiaiškinant, kokiai sąlygai p esant yra faktas q, galimi trys atvejai: a) jei sąlygos p įvykdymas užtikrina faktą q, sakoma, kad sąlyga p pakankama faktui q ($p \to q$); b) jei sąlyga p yra neįvykdoma ir tada fakto q negali būti, sakoma, kad sąlyga p yra būtina faktui q ($\overline{p} \to \overline{q}$); c) sąlyga p bus būtina ir pakankama, kai bus teisingas teiginys $q \to p$.

Tokiu būdu yra trijų rūšių sąlygos:

1) pakankama, bet nebūtina, kai teiginys $p \to q$ teisingas, o teiginys $\overline{p} \to \overline{q}$ klaidingas;
2) būtina, bet nepakankama, kai teiginys $\overline{p} \to \overline{q}$ teisingas, o $p \to q$ klaidingas;
3) būtina ir pakankama sąlyga, kai abu šie teiginiai teisingi.

Bendru atveju matematinis apibrėžimas nėra teiginys (apie apibrėžimą bendru atveju negalima pasakyti, teisingas jis ar ne; jis tik protingai išrenkamas iš keleto galimų apibrėžimų). Tačiau kiekvieną apibrėžimą galime suformuluoti taip, kad jis taptų teiginiu. Tam reikia, kad griežtame sąvokos apibrėžime būtų atspindėtos būtinos ir pakankamos sąlygos tam, kad apibrėžiamasis objektas priklausytų tam tikrai aibei (duotosios sąvokos apimčiai). Pvz.: „Keturkampis yra lygiagretainis tada ir tik tada, kada jo priešingosios kraštinės poromis yra lygiagrečios“. Kartu reikia turėti omenyje, kad iš visos savybių, kurias turi apibrėžiamasis objektas, aibės, savybes, galinčias apibūdinti kurį nors objektą, galima atrinkti keliais būdais. Jei vienas savybių rinkinys panaudojamas suformuluoti apibrėžimui, tai likusieji rinkiniai gali būti įrodyti kaip teoremos. Tos teoremos, kurios išreiškia sąvokos egzistavimo pakankamas sąlygas, vadinamos šios *sąvokos požymiais*, o teoremos, išreiškiančios būtinas sąvokos egzistavimo sąlygas, vadinamos *sąvokos savybėmis*. Jei matematinis objektas A, apibrėžtas apibrėžimu α, turi savybę β, tokią, kad $\alpha \sim \beta$, tai β yra vadinama objekto A savybe. Bet kuri charakteringoji matematinio objekto savybė gali būti to objekto apibrėžimu. Pvz., teorema: „Lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau“ yra viena iš lygiagretainio savybių. Atvirkštinė teorema „Jei keturkampio įstrižainės susikirsdamos susikirtimo taške dalijasi pusiau, tai tas keturkampis yra lygiagretainis“ yra lygiagretainio požymis. Jei šią teoremą laikytume lygiagretainio apibrėžimu, tai pradinį įprastąjį lygiagretainio apibrėžimą galima įrodyti kaip teoremą.

6. BŪTINOS IR PAKANKAMOS SĄLYGOS MOKANT MATEMATIKOS MOKYKLOJE

Jau mokydamiesi dalumo požymių, mokiniai susiduria su būtinomis ir pakankamomis sąlygomis. Ypač svarbu, kad mokiniai įsisavintų sąvokas „tie skaičiai“, „tik tie skaičiai“, „tie ir tik tie skaičiai“.

Antrasis susitikimas su būtinomis ir pakankamomis sąlygomis įvyksta tada, kai įvedama geometrinės taškų vietos sąvoka, kuri aprašoma taip: geometrine vieta taškų, turinčių tam tikrą savybę, vadinsime aibę taškų, kurios visi taškai ir tik jie turi šią savybę. Kad kokią nors taškų aibę galėtume pavadinti geometrine vieta, reikia nustatyti, kad kiekvienas aibės taškas turi tam tikrą savybę ir kad nei vienas taškas, nepriklausantis tai aibei, neturi tos savybės. Taigi būtina įrodyti tiesioginę ir priešingąją (arba atvirkštinę) teoremas. Todėl kiekviena teorema apie geometrinę taškų vietą turi savyje būtiną ir pakankamą sąlygas.

Kad mokiniai gerai įsisavintų sąvokas: „būtina“, „pakankama“, „būtina ir pakankama sąlygos“, naudinga duoti atlikti seriją pratimų:

1) kad pereitum į aukštesnę klasę, ... turėti teigiamus pažymius iš visų mokomųjų dalykų,
2) kad baigtum vidurinę mokyklą, ... išlaikyti visus reikiamus egzaminus;
3) kad taptum inžinieriumi, ... mokytis aukštosios matematikos;
4) kad numalšintum troškulį, ... išgerti stiklinę vandens.

Vėliau pereinama prie matematinių pratimų:

1) kad dviejų natūraliųjų skaičių suma būtų lyginis skaičius, ... , kad kiekvienas dėmuo būtų lyginis skaičius;

2) kad natūralusis skaičius dalytųsi iš 6, ... , kad jis dalytųsi iš 2;
3) kad natūralusis skaičius dalytųsi iš 6, ... , kad jis dalytųsi iš 2 ir 3;
4) kad lygtis $(x - 1)(x - 2) = 0$ turėtų sprendinį, ... , kad būtų $x = 1$;
5) kad lygtis $2x + 5 = 13$ turėtų sprendinį, … , kad būtų $x = 4$.

Vėliau pateikiama serija teiginių ir pasiūloma išsiaiškinti, ar kiekviename tų teiginių yra būtinos ir pakankamos sąlygos ir tuos teiginius, kuriuose jos yra, siūloma suskaidyti į du teiginius taip, kad viename jų būtų būtinas, kitame – pakankamas požymiai:

1) Kad skaičius dalytųsi iš 15, būtina ir pakankama, kad jis dalytųsi iš 3 ir 5.
2) Skaičius iš 3 dalijasi tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 3.
3) Iš 2 dalijasi tie ir tik tie skaičiai, kurie baigiasi nuliu ar lyginiu skaičiumi.
4) Kad iškilusis keturkampis būtų lygiagretainis, būtina ir pakanka, kad jo priešingosios kraštinės būtų poromis lygios.

Dar toliau pateikiamos teiginių poros ir pasiūloma kiekvieną porą sujungti į vieną teiginį:

1) Jei skaičius dalijasi iš 3 ir 5, tai jis dalijasi iš 15. Jei skaičius dalijasi iš 15, tai jis dalijasi iš 3 ir 5.
2) Jei vienas iš dviejų dauginamųjų dalijasi iš 3, tai ir sandauga dalijasi iš 3. Jei dviejų dauginamųjų sandauga dalijasi iš 3, tai bent vienas dauginamasis dalijasi iš 3.
3) Priešingieji lygiagretainio kampai yra lygūs. Jei iškiliajame keturkampyje priešingieji kampai yra lygūs, tai tas keturkampis – lygiagretainis.
4) Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs. Jei trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs, tai tas trikampis – lygiašonis.

Nagrinėjant progresijas, vėl grįžtama prie jų charakteringųjų savybių, kurios irgi yra būtinos ir pakankamos sąlygos.

Taikant terminus „tie ir tiktai tie“, „tada ir tik tada“, „būtina ir pakankama“ teoremose, mokiniams reikia būtinai paaiškinti, kad kiekvienas iš šių terminų leidžia kiekviename teiginyje iš karto pateikti dvi teoremas: tiesioginę ir atvirkštinę.

7. TEOREMOS, ATVIRKŠTINĖS SUDĖTINĖMS TEOREMOMS

Sudėtinėse teoremose su keliomis sąlygomis ir viena išvada tarpusavio sąryšis tarp tiesioginės ir atvirkštinės teoremų yra sudėtingesnis. Tokiais atvejais gali būti sukonstruota keletas atvirkštinių teoremų, kurių dalis gali būti teisingos, dalis – klaidingos. Atvirkštinių teoremų sąlygomis gali būti arba tik tiesioginės teoremos išvada, arba kuri nors iš jos sąlygų ir išvada, o atvirkštinių teoremų išvados bus tiesioginės teoremos sąlygos arba dalis jų. Pvz., tiesioginė teorema: „Gretutinių kampų suma lygi 180°“ turi tris atvirkštines teoremas:

1) Jei dviejų kampų suma lygi 180°, tai jie gretutiniai (klaidinga).

2) Jei du kampai turi bendrą kraštinę, yra išsidėstę skirtingose pusplokštumėse šios kraštinės atžvilgiu, tai kitos dvi jų kraštinės – priešingi spinduliai (klaidinga).
3) Jei dviejų kampų suma lygi 180° ir jų dvi kraštinės sudaro tiesę, tai kita jų kraštinė – bendra (teisinga).

Jei tiesioginė teorema turi keletą sąlygų ir išvadų, tai atvirkštinių teoremų sudarymas tampa dar sudėtingesnis. Tokiais atvejais atvirkštinė teorema gali ir neturėti savo sąlygoje ir išvadoje visų tiesioginės teoremos išvadų ir sąlygų. Pvz., teoremai: „Lygiagretainio priešingosios kraštinės poromis yra lygios“ viena iš atvirkštinių teoremų bus: „Jei iškiliojo keturkampio dvi kraštinės yra lygiagrečios, o dvi kitos – lygios, tai toks keturkampis – lygiagretainis“ – čia nepanaudojama viena iš tiesioginės teoremos išvadų – kitos priešingųjų kraštinių poros lygybė.

Formuluojant sudėtinės teoremos, turinčios kelias sąlygas ir išvadas, atvirkštines teoremas, galima tiesioginę teoremą pirma išskaidyti į tiek teoremų, kiek yra išvadų, o tada formuluoti tiek atvirkštinių teoremų, kiek buvo tų išvadų.

8. ATVEJAI, KAI TIESIOGINĖS TEOREMOS BŪTINAI TURI TEISINGAS ATVIRKŠTINES TEOREMAS

Tegu turime seriją tiesioginių teiginių:

$p_1 \to q_1$
$p_2 \to q_2$
....
$p_n \to q_n$.

Tegu sąlygos $p_1, p_2, ..., p_n$ yra vienintelės galimos ir išsemia visus galimus atvejus. Tegu visos išvados $q_1, q_2, ..., q_n$ yra skirtingos ir nei viena iš jų nesutampa su kita. Tada atvirkštinės teoremos bus:

$q_1 \to p_1$
$q_2 \to p_2$
....
$q_n \to p_n$.

Tokiais atvejais atvirkštinės teoremos nėra formuluojamos bei įrodinėjamos. Mokykloje tokių atvejų irgi pasitaiko. Antai skirtingų trikampių kraštines sieja trys priklausomybės:

$c^2 = a^2 + b^2$ (statusis trikampis),
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ap$ (smailusis trikampis),
$c^2 = a^2 + b^2 + 2ap$ (bukasis trikampis),

kur a, b, c – kraštinių ilgiai, p – kraštinės b projekcijos kraštinėje a ilgis. Šių teoremų sąlygos – vienintelės galimos: kraštinė c yra arba prieš statųjį, arba prieš smailųjį, arba prieš bukąjį kampą. Atitinkamai skirtingos ir nesutampančios yra ir išvados. Todėl atvirkštinės teoremos, nors jos yra teisingos, neformuluojamos ir neįrodinėjamos, tačiau mokytojas turi apie jų egzistavimą mokiniams pasakyti, kitaip į klausimą, kokie yra trikampiai, jei jų kraštinės lygios, pvz.: a) 3, 4 , 5; b) 3, 4, 6 ir c) 6, 8, 9 ilgio vienetams, mokiniai pateiks teisingus atsakymus ir neteisingus jų pagrindimus, remdamiesi tiesioginėmis teoremomis.

9. TEOREMOS SĄVOKOS FORMAVIMAS MOKYKLOJE

Nagrinėjant įvairių matematinių objektų savybes, pvz., figūrų geometrijoje, skaičių aritmetikoje, lygčių algebroje, prireikia daryti vienas ar kitas išvadas, t. y. formuluoti teiginius, kurių teisingumą būtina pagrįsti, įrodyti – teoremas. Mokytojas turi pasiekti, kad mokiniai sugebėtų atskirti teoremos sąlygą ir išvadą. Tam padeda teoremų formulavimas implikacinio teiginio forma: „Jei ..., tai ...“. Teoremos sąvoka mokykloje pirmiausia įvedama geometrijos kurse, prieš tai jau įrodžius keletą pirmųjų teiginių, dar jų neįvardijus teoremomis. Tada pačią teoremos sąvoką jau galima konkretinti mokinių suvoktais pavyzdžiais.

Įsisavinant teoremos sąvoką, reikia paprasto teiginio forma išreikštas teoremas išmokyti išreikšti implikaciniais teiginiais, pradedant nuo nesudėtingų teoremų, pvz.: „Dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius“, „Kryžminiai kampai yra lygūs“ ir pan. Taip pat reikia mokyti formuluoti visų keturių rūšių teoremas, jei yra pateikta tiesioginė teorema. Mokiniai turi suvokti, jog teoremoje turi būti nurodyta: a) kokiomis sąlygomis joje nagrinėjamas tam tikras objektas; b) kas apie tą objektą tvirtinama. Atskirti objektą nuo sąlygų kartais būna gana sunku, nes šios sąlygos neretai būna paslėptos pačiame objekto pavadinime. Pvz., „Rombo įstrižainės yra tarpusavyje statmenos“. Sąlygos čia slypi sąvokoje „rombas“. Kad būtų lengviau įvykdyti aukščiau minėtą reikalavimą, vartojama implikacija: „Jei lygiagretainis yra rombas, tai jo įstrižainės yra tarpusavyje statmenos“.

10. MATEMATINIŲ TEIGINIŲ MOKYMAS MOKYKLOJE

10.1. Matematinių teiginių mokymo etapai

Matematinių teiginių mokymas vyksta trimis etapais: įvadas, įsisavinimo užtikrinimas ir įtvirtinimas.

Pirmasis etapas – pamokoje sukuriama tokia situacija, kad mokiniai arba patys „atranda“ naujas teoremas, savarankiškai formuluoja naujus jiems matematinius teiginius, arba yra tik parengiami juos suprasti.

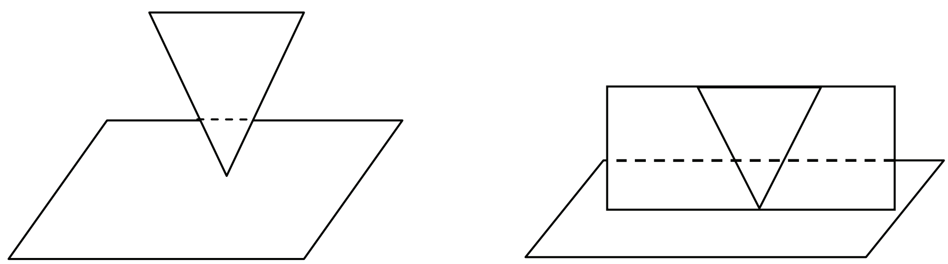
Antrajame etape mokiniai išmokomi taikyti matematinius teiginius praktikoje, pasiekiama, kad mokiniai greitai ir be klaidų juos įsimintų ir suprastų kiekvieną žodį formuluotėse. Įtvirtinimas vyksta taip: kartojamos teiginių formuluotės, formuojami jų taikymo sprendžiant uždavinius įgūdžiai.

Būtina prisiminti, kad mokykloje kai kurie apibrėžimai bei teoremos vadinami taisyklėmis ir atitinkamai formuluojami. Ypač tai ryšku pradinėse klasėse – tai vienintelis matematinių teiginių pateikimo būdas pradinukams. Todėl aukštesnėse klasėse ir kyla sunkumų, įvedant aksiomos, teoremos bei apibrėžimo terminus.

10.2. Matematinių teiginių įvedimas

Priklausomai nuo nagrinėjamos medžiagos pobūdžio, jai išnagrinėti skirto laiko, mokinių amžiaus ypatybių ir daugelio kitų veiksnių mokytojas pasirenka vieną iš trijų naujų matematinių teiginių įvedimo kelių: a) mokiniai parengiami tam, kad savarankiškai formuluotų apibrėžimus, aksiomas ir atrastų teoremas; b) mokiniai rengiami sąmoningai suvokti, suprasti naują matematinį teiginį, kuris jiems mokytojo po to pateikiamas; c) mokytojas iš karto formuluoja naują apibrėžimą, aksiomą ar teoremą be kokio nors išankstinio pasirengimo, o po to mokinių pastangas kreipia į jų įsisavinimą bei įtvirtinimą. Pirmųjų dviejų pasirinkimų atveju mokytojas naudoja euristinį metodą, pamokose sukuriamos *probleminės situacijos* (gr. „*problēma*“ – uždavinys, užduotis; pranc. „*situation*“ – padėtis), kurios padeda mokiniams savarankiškai atrasti naujas žinias. Tai kelia jų susidomėjimą pamokomis, padeda ugdyti kūrybinius gebėjimus. Tačiau visa tai reikalauja didelių laiko sąnaudų, kartais blaškomas mokinių dėmesys – sutelkiamas į antraeilius klausimus ir jie atitraukiami nuo pagrindinių idėjų. Trečias atvejis dažnai kritikuojamas, laikomas dogmatinio mokymo pavyzdžiu. Tačiau primygtinis reikalavimas taikyti vien euristinius mokymo metodus – irgi savo rūšies dogmatizmas. Daugelis mokytojų sėkmingai naudojasi būtent trečiuoju keliu, vietomis jį susiedami su pirmojo ir antrojo elementais. Pirmasis ir antrasis keliai labai susiję su *tikslingu uždavinių parinkimu*. Uždaviniai parenkami atsižvelgiant į realias darbo sąlygas klasėje. Mokėjimas tai tinkamai atlikti yra labai svarbus mokytojo darbe. Pvz., nagrinėjant geometrines sąvokas, pratimai dažnai parenkami taip, kad mokiniai nubraižytų atitinkamą figūrą ir galėtų pakankamai išskirti požymius sąvokos, su kuria norima juos supažindinti. Išskirtieji požymiai yra būtini formuluojant tos sąvokos apibrėžimą. Mokinių nubraižytos figūros vėliau panaudojamos įrodant teoremas, sprendžiant uždavinius. Tai sutaupo mokymo laiką. Štai kokia užduotis rekomenduotina prieš apibrėžimo „Lygiagretainis – keturkampis, kurio priešingosios kraštinės lygiagrečios“ pateikimą: „Nubrėžkite dvi lygiagrečias tieses, o po to – kitas dvi lygiagrečias tieses taip, kad jos kirstų pirmąsias dvi. Gavome keturkampį, kurį vadiname lygiagretainiu. Pabandykite suformuluoti jo apibrėžimą“. Panašiai mokiniams tikslingai parinkus uždavinius padedama suvokti naujas teoremas. Pvz., pateikus pratimą: „Nubrėžkite apskritimą ir dvi tarpusavyje nelygias jo stygas. Nustatykite iš akies, kuri iš jų yra arčiau centro. Suformuluokite savo išvadą. Ar ji patikima?“ Paskutinį klausimą pradžioje visuomet formuluoja mokytojas, o vėliau jį įpranta sau kelti ir mokiniai. Mokiniai per jį įsisąmonina, kad, atrodytų, braižant ir matuojant gauta patikima išvada nėra jau tokia patikima – ją reikia įrodyti.

Panašiai elgiamasi ir formuluojant aksiomas. Antai supažindinant su aksioma: „Jei dvi skirtingos plokštumos turi vieną bendrą tašką, tai jos kertasi tiese, einančia per tą tašką“ panaudojamas modelis: trikampė plokštelė viršūne pritvirtinama prie stačiakampio, padengto plastilinu (21 pav., a). Mokinių klausiama: „Ar gali dvi plokštumos turėti tik vieną bendrą tašką?“. Išgirdus teigiamą atsakymą, paimama skaidri stačiakampė plokštelė, sutapdinama su trikampiu (21 pav., b). Ji akivaizdžiai kertasi tiese su plastilinu padengtu stačiakampiu.



a) b)

21 pav.

Tai ir padeda suformuluoti aksiomą.

Žemesniųjų klasių vadovėliuose pateikiama daug tikslingų uždavinių bei pratimų prieš įvedant naujas taisykles. Tad mokytojui rekomenduotina tik gerai organizuoti jų sprendimą, susipažinus su nurodymais, duotais knygose mokytojui. Būtina pažymėti, kad „tikslingų uždavinių metodą“ daug kur, remdamasis Vakarų Europos, ypač Vokietijos, patyrimu, pagrindė žymiausias XX a. pradžios rusų matematikos didaktikos specialistas Semionas Šochoras-Trockis (1853–1923) [148]. Pabrėžiama tikslingų uždavinių taikymo mokymo procese svarba ir Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklų bendrosiose programose [34].

10.3. Matematinių teiginių įsisavinimo užtikrinimas

Nereti atvejai, kai mokiniai susiduria su sunkumais, taikydami apibrėžimus ar teoremas neįprastose situacijose, nors gerai atsimena jų formuluotes. Tai – *formalizmo* (lot. „*formalis*“ – susijęs su forma) atvejai. Pvz., gana populiari klaida yra

$(\frac{1}{2})^x > \frac{1}{4}$, $x > 2$.

Dažnai mokiniai moka spręsti kurio nors tipo uždavinius, bet negali paaiškinti, kuo remiasi spręsdami juos. O kartais mokiniai nesugeba sugalvoti, kokius jiems gerai žinomus matematinius teiginius reikia pritaikyti. Štai, pvz., mokiniai, gerai įsiminę formulę $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, nemoka jos pritaikyti reiškiniui $\sin \frac{1}{2}\alpha$ pertvarkyti. Kai trikampio padėtis a) (22 pav.), mokiniai neabejoja, kad vienas jo kampas status, tačiau kai jo padėtis b), jie kartais teigia, kad stataus kampo trikampis neturi.

a) b)

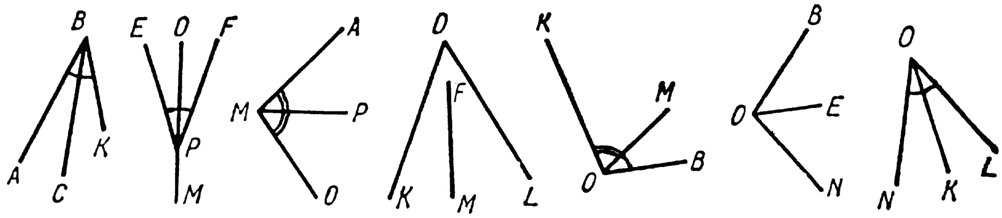
22 pav.

Norint išvengti tokių ir panašių klaidų, reikia taikyti įvairius matematinių teiginių mokymo metodus. Jei teoremų, aksiomų ir apibrėžimų formuluotės mokiniams yra suprantamos ir lengvai įsimenamos, tai nuo to ir reikia pradėti: pirma tegu mokiniai supranta ir įsimena jas, o po to taiko uždaviniams ir pratimams spręsti. Taip mokiniai gali būti supažindinami su trupmenų veiksmais, skaitinių nelygybių savybėmis, kai kurių funkcijų savybėmis, Vieto (Fransua Vietas (*Viete*, 1540–1603)) teorema, geometriniais apibrėžimais (stygos, eilės geometrinių figūrų) ir teoremomis (lygiagretumo požymiai, Pitagoro (*Pythagoras*, apie 570 – apie 500 pr. Kr.) teorema).

Jei reikia įsisavinti sudėtingus matematinius teiginius, kartais naudinga juos skaityti dalimis ir tas dalis taikyti atliekant pratimus. Pvz., supažindinant su kampo pusiaukampine, pradžioje pasiūloma iššikirpti iš popieriaus kampą ir jį sulenkti taip, kad sutaptų jo kraštinės. Ištiesus modelį gaunama, kad kampas pasidalijo pusiau, sulenkimo linija pavadinama pusiaukampine. Perskaitomas apibrėžimas: „Spindulys, išeinantis iš kampo viršūnės ir dalijantis kampą į dvi lygias dalis, vadinamas kampo pusiaukampine“. Toliau atliekamas pratimas: „Nurodyti, kurios linijos brėžiniuose (23 pav.) yra kampų pusiaukampinės. Lygūs kampai pažymėti vienodu lankelių skaičiumi“. Taip dirbant vienu metu ir įsimenamas apibrėžimas, ir formuojami jo taikymo įgūdžiai.

Įvyksta nevalingas įsiminimas, kuris paprastai yra tvirtesnis už valingąjį.

Taigi didelę reikšmę turi pedagogo mokėjimas susieti indukciją ir dedukciją matematinių teiginių mokymo procese: dėstant naują medžiagą, ją įtvirtinant, tikrinant įsisavinimo kokybę. Tačiau tikslių receptų, kaip tai reikia atlikti, nėra ir negali būti.



1) 2) 3) 4) 5) 6) 7)

23 pav.

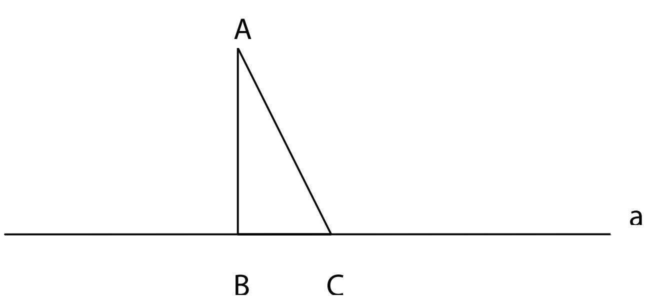
Tai pabrėžia ir žinomas rusų matematikos didaktikos specialistas L. Kudriavcevas: „Nors ir labai gaila, neegzistuoja tikslūs receptai, kaip reikia dėstyti atskirus matematikos programos skyrius. Matematikos mokymo metodika ne mokslas, o menas. Tiesa, tai visai nereiškia, kad matematikos mokymo metodikos nereikia mokyti. Kiekvieno meno galima ir reikia mokyti: mokosi ir dailininkai, ir muzikai, ir aktoriai, ir rašytojai“ [130, p. 112].

V. LOGIKOS DĖSNIŲ PANAUDOJIMAS MOKANT MATEMATIKOS

Kadangi mokymu siekiama ugdyti taisyklingą mokinių mąstymą, tai logikos dėsniai yra naudojami kaip normatyvinės mąstymo taisyklės. *Tapatybės dėsnis* neleidžia samprotavimo procese pakeisti kurią nors sąvoką ar teiginį kita sąvoka ar teiginiu, vartoti terminus skirtingomis prasmėmis, reikalauja sąvokų tikslumo, aiškumo, vienareikšmiškumo. Ypač svarbu būti atsargiems su homonimais (laukas, klasė, žiedas ir pan.). Todėl dėstant reikia jų kiek įmanoma vengti, o jei jau to negalima išvengti – būtina gerai išaiškinti jų prasmę. Tapatybės dėsnis reikalauja dėstyti medžiagą tiek žodžiu, tiek raštu aiškia, paprasta kalba. Vadovėlis turi padėti mokiniui išskirti tai, kas esmingiausia, atskirti pagrindinius dalykus nuo antraeilių, vengti daugiažodžiavimo. Medžiaga vadovėlyje turi būti išdėstyta trumpai, vaizdžiai, logiškai tiksliai, bet ne sausai. Sąvokų ir simbolių aiškumas, vartojimo vienareikšmiškumas reikalauja ypatingos matematinės kalbos, laikantis taisyklių, kurios, ne taip kaip gramatikos, nepakenčia jokių išimčių, nes, kaip tvirtino žymus JAV matematikas D. Poja, pvz., „lygčių sudarymas sutampa su vertimu, vertimu iš įprastos kalbos į simbolių kalbą“ [135, p. 116]. Ir ta kalba turi būti suprantama vienareikšmiškai.

Analizuodami naują uždavinį, mokiniai turi įsivesti atitinkamus simbolius. D. Poja laiko, kad gera simbolių sistema turi tenkinti tokius reikalavimus: būti vienareikšmė, turininga, lengvai įsimenama. Mokytojas turi parodyti mokiniams, kad matematinių simbolių kalba padeda jiems spręsti uždavinius.

Kartu su *prieštaravimo dėsniu* tapatybės dėsnis padeda atlikti palyginimo operaciją, nustatančią nagrinėjamų faktų sutapimą ar jų skirtingumus. Prieštaravimo dėsnis naudojamas ir *dichotominiam skirstymui* pagrįsti. Mokant matematikos dažnai naudojamas *atvedimas prie absurdo* (lot. „*reductio ad absurdum*“ – grąžinimas į beprasmybę) – įrodymas vadinamuoju prieštaros metodu. Jo esmė: įrodoma, kad teiginys, priešingas duotajam, yra klaidingas. Jis pagrįstas *negalimo trečiojo dėsniu*. Pvz., įrodant teoremą: „Iš taško, esančio šalia tiesės, galima nuleisti į ją statmenį ir tiktai vieną“ daroma prielaida, kad galima nuleisti daugiau kaip vieną statmenį, pasitenkinant dviem statmenimis. Tada turėsime: $AB \perp a$, $AC \perp a$,



24 pav.

$\angle ABC = \angle ACB = 90°$, bet $\angle BAC = 0°$, o tai ir reikš, kad statmenys AB ir AC (o ir visi kiti) sutaps (24 pav.).

Pakankamo pagrindo dėsnis mokykloje ypač pasireiškia įrodant teoremas ir sprendžiant uždavinius. Apie tai plačiau bus kalbama kituose skyriuose.

VI. DEDUKCINIAI SAMPROTAVIMAI IR ĮRODYMAI MOKANT MATEMATIKOS

1. BENDROS PASTABOS

Sprendiniai mąstymo procese formuluojami dviem būdais: tiesiogiai ir tarpiškai. Pirmuoju atveju sprendinys išreiškia suvokimo rezultatą, pvz., „Ši figūra – trikampis“. Antru atveju sprendinys gaunamas kaip ypatingos mąstymo veiklos rezultatas, ta mąstymo veikla vadinama samprotavimu. Pvz.: „Ši plokščioji figūra yra sudaryta iš trijų poromis besikertančių atkarpų, vadinasi, ji yra trikampis“. Šios mąstymo veiklos procese pereinama nuo vieno ar keleto tarpusavyje susijusių sprendinių prie naujo sprendinio, kuriame yra naujų žinių apie nagrinėjamą objektą. Šis perėjimas yra samprotavimas, kuris yra aukščiausioji mąstymo forma. Taigi samprotavimas yra naujo sprendinio (išvados) gavimas iš vieno ar kelių duotųjų sprendinių. Pažintinė matematinių samprotavimų reikšmė yra didžiulė. Jie praplečia mūsų žinių apie realaus pasaulio objektus ir reiškinius ratą būtent dėl to, kad dauguma matematinių teiginių išvedami iš palyginti negausaus pagrindinių sprendinių skaičiaus. Tie sprendiniai gaunami tiesioginio patyrimo keliu ir juose atspindimos paprasčiausios ir bendriausios žinios apie matematinius objektus. Samprotavimai kaip mąstymo formos skiriasi nuo sąvokų ir sprendinių tuo, kad jie yra loginių operacijų su atskiromis mintimis seka. Ne kiekvienas sprendinių junginys yra samprotavimas: tarp sprendinių turi egzistuoti atitinkamas loginis ryšys, atspindintis objektyvų ryšį, egzistuojantį realioje tikrovėje. Suprantama, kad didžiulę reikšmę matematinių žinių sistemoje turi mokėjimas teisingai formuluoti įvairiausius matematinius teiginius ar daryti išvadas svarstymo procese. Šnekamoji kalba ne visada tinka atitinkamiems sprendiniams išreikšti, ypač jų loginei struktūrai išryškinti. Todėl natūraliai atsirado poreikis patobulinti kalbą, naudojamą svarstymo procesuose. Tam labiausiai tinkama pasirodė esanti matematinė (simbolinė) XIX a. viduryje sukurtos *matematinės logikos* kalba. Būtent matematinė logika visiškai išsprendė matematinių įrodymų sukūrimo problemą, suvaidino lemiamą vaidmenį tolesnėje matematikos raidoje.

Formalioji logika atsirado gilioje senovėje Graikijoje, jos pradininkas – Aristotelis. Jos objektas – sprendinių ir sąvokų tarpusavio ryšių dėsningumų samprotavimuose ir įrodymų taisyklėse tyrinėjimas. Matematinės logikos pradininkas buvo anglų matematikas Džordžas Bulis (*Boole*, 1815–1864). Matematinė logika skiriasi nuo formaliosios logikos tuo, kad ji, remdamasi pastarosios pagrindiniais dėsniais, tiria loginių procesų dėsningumus, naudodama matematinius metodus. Loginiai ryšiai, kurie egzistuoja tarp sprendinių, sąvokų ir t. t., čia išreiškiami formulėmis, kurios yra apsaugotos nuo neaiškumų, kylančių tuos ryšius išreiškiant šnekamąja kalba. Tokiu būdu matematinė logika formalizuoja logines operacijas, visiškai abstrahuotas nuo konkretaus teiginių turinio.

2. DEDUKCIJA IR INDUKCIJA SAMPROTAVIMŲ PROCESE

Indukcija ir dedukcija yra susiję tarp savęs taip pat, kaip ir analizė bei sintezė. Matematinės veiklos (ir matematikos mokymo) procese indukcija ir dedukcija nėra izoliuotos viena nuo kitos, jos dažnai tarpusavyje susipina. Indukcijoje einame nuo prielaidų, išreiškiančių mažiau apibendrintas žinias, prie naujo teiginio, kuris yra labiau apibendrintas, nuo atskirų konkrečių reiškinių prie apibendrinimo. Dedukcijoje svarstymo eiga yra priešinga, t. y. nuo apibendrinimų, išvadų mes einame prie atskirų konkrečių faktų ar teiginių, kurių bendrumas yra mažesnio lygio. Mokymo procese indukciniai ir dedukciniai metodai taikomi kartu. Indukciniai metodai taikomi tada, kai nagrinėjama nauja medžiaga, nesunki mokiniams, ir pokalbio metu jie patys gali suformuluoti apibrėžtą išvadą, taisyklę, teoremą, dėsnį, atlikti apibendrinimą. Indukciniai metodai aktyvina mokinius, o mokytojas juos turi taikyti kūrybiškai, lanksčiai. Turime turėti galvoje, kad čia reikia didesnių laiko sąnaudų.

Dedukcija gali būti ir medžiagos dėstymo būdas, ir mokymo metodas, kai nuo bendrų taisyklių ir teiginių ateinama prie mažiau bendrų ar dalinių taisyklių ir teiginių.

Dedukciniai metodai taikomi taip: mokytojas pateikia bendrą teiginį, išreiškiantį kokią nors taisyklę, dėsnį, teoremą ir t. t., o po to taiko jį, iliustruoja daliniais pavyzdžiais, atvejais, faktais ir t. t.

Indukcijos ir dedukcijos susiejimas mokymo procese atskleidžia du medžiagos aiškinimo kelius.

Antai pradiniame matematikos mokymo etape labiau tinka indukciniai metodai, palaipsniui rengiant mokinius taikyti dedukcinius metodus. Abiem atvejais didelį vaidmenį vaidina konkrečios iliustracijos, pavyzdžių ir dalinių atvejų nagrinėjimas. Didelę reikšmę čia turi mokinių savarankiško darbo sumanus organizavimas. Matematika – dedukcinis mokslas. Griežtai išdėstant bet kurią matematinę discipliną nustatoma pradinių sąvokų ir santykių sistema (be apibrėžimų), po to konstruojama aksiomų sistema, kuri sujungia pradines sąvokas ir santykius, vėliau suformuojamos naujos sąvokos, jos apibrėžiamos, formuluojami ir įrodomi nauji teiginiai (teoremos, lemos, išvados).

Kaip tyrimo metodas dedukcija apibūdinama tuo, kad naujoms žinioms gauti apie kokį nors objektą, sąvoką, savybę surandama artimiausia duotajam objektui objektų klasė (artimiausia gimininė sąvoka) ir šiam objektui (sąvokai) taikomos esminės šios objektų klasės savybės (giminės požymis).

Mokslo raidoje indukcija ir dedukcija nėra izoliuotos viena nuo kitos, jos dažnai susipina, papildo viena kitą, jos negalimos viena be kitos. Kiekviena mokslinė dedukcija yra tiesioginis ar tarpiškas (per kitas dedukcijas) prieš tai buvusio indukcinio medžiagos nagrinėjimo, indukcinių išvadų taikymo rezultatas. Bet kuri mokslinė indukcija slepia savyje mintį apie tai, kad nagrinėjami daliniai faktai yra bendro dėsningumo atskiri atvejai. Be to, kiekviena mokslinė indukcija yra vertinga tik tada, kad yra jos dedukcinio panaudojimo pagrindas. Matematika – iš tiesų dedukcinis mokslas. Tai teisingas tvirtinimas, nes visos matematinės teorijos išdėstomos dedukciniu būdu. Tačiau, jei tirsime matematinių dalykų raidą, tai matysime, kad jiems nesvetima indukcija. Mokykloje dėstant matematiką indukcija ir dedukcija irgi plačiai taikomos. Pradiniame etape labiau taikoma indukcija, nes ji labiau atitinka amžiaus tarpsnių (vaikystės, paauglystės) ypatybes. Naudodamiesi dedukcija, mes įrodome teiginius, suformuluotus indukcijos būdu kaip hipotezes (prielaidas). Esminis skirtumas tarp indukcijos ir dedukcijos – išvados gavimas. Indukcijos išvada – tik tikėtina (galimai teisinga), dedukcijos išvada – patikima (būtinai teisinga), jei tik prielaidos teisingos. Todėl indukcija nėra laikoma įrodymo būdu, o dedukcija – laikoma. Dėl to kartais indukcijos vaidmuo nepakankamai vertinamas, o tai nėra teisinga. Matematinis mąstymas nesusideda vien tik iš formalių įrodymų. Mąstymo procesai, kuriuose remiamės tikėtinais svarstymais, pasakančiais mums, ką ir kaip reikia įrodyti, sudaro dalį matematinio mąstymo, kaip ir pats formalusis įrodymas. Tai labai svarbu suvokti mokytojui: mokiniai nesupras tikrojo formaliojo ir griežto įrodymo vaidmens, jei jie neturi tam tikros tokių neformalių svarstymų patirties. Žinomas prancūzų matematikas Žakas Adamaras (*Hadamard*, 1865–1963), pabrėždamas griežtų dedukcinių įrodymų vaidmenį, teigė, kad matematinio griežtumo tikslas – sankcionuoti ir įteisinti intuicijos pasiekimus, ir, be to, matematinis griežtumas niekada neturėjo kito tikslo.

Įvairūs mąstymo lygiai remiasi skirtingais griežtumo lygiais, skirtingomis formaliųjų išvadų struktūromis. Mokinys turi būti išmokęs atrasti, įvertinti ir kritiškai analizuoti įrodymus jo galimybes atitinkančiu lygiu.

Dedukcija, loginis išvedimas, yra formalaus charakterio, pasižyminčio tuo, kad svarstymuose, įrodymuose vieni teiginiai išvedami iš kitų remiantis apibrėžtu ryšiu tarp jų formos, struktūros ir nepriklauso nuo konkretaus šių teiginių turinio. Yra daug dedukcinio svarstymo būdų, kurie neišreikštine forma taikomi matematiniuose įrodymuose:

1) $\dfrac{x \to y,\ x}{y}$ (lot. „*modus ponens*“ – išvados taisyklė);

2) $\dfrac{x \to y,\ \overline{y}}{\overline{x}}$ (lot. „*modus tollens*“ – neigimo taisyklė);

3) $\dfrac{x \to y}{\bar{y} \to \bar{x}}$ (kontrapozicijos taisyklė);

4) $\dfrac{x \wedge y \to z}{x \wedge \bar{y} \to z}$ (išplėstinės kontrapozicijos taisyklė);

5) $\dfrac{x \to y,\ y \to z}{x \to z}$ (silogizmo taisyklė).

Šie įrodymo būdai užrašyti teiginių algebros kalba. Plačiai taikomos ir kai kurios kitos išvedimo taisyklės, užrašomos aibių algebros kalba:

1) $\dfrac{p \subset q,\ q \cap z = \varnothing}{\mathrm{p} \cap \mathrm{q} = \varnothing}$

2) $\dfrac{p \cap \bar{q} = \varnothing,\ z \subset \mathrm{q}}{p \cap \bar{z} \neq \varnothing}$

Taigi dedukcija laikome naujo teiginio išvedimą remiantis anksčiau išvestų teiginių aibe. Toks išvedimas gali remtis vienu teiginiu ar teiginių grandine (tinklu) ir jo tikslas – pagrįsti naują teiginį. Skiriamieji dedukcijos bruožai yra tokie – naudojantis ja: a) nustatomas arba savybių priklausymas objektui (ar jų klasei), arba objekto (ar jų klasės) priklausymas kitai didesnės apimties klasei; b) formuluojama bendra išvada; c) išvados gaunamos teisingos, jei tik prielaidos ir svarstymai yra teisingi.

3. DEDUKCINĖ SISTEMA

Jei dėstant kurį nors matematinį dalyką nuolat taikomi dedukciniai metodai, tai jis įgyja naują kokybę – tampa dedukcine sistema. Kuriant dedukcinį matematinį dalyką pirmiausia nustatoma pradinių sąvokų ir ryšių tarp jų sistema. Po to formuluojama pradinių aksiomų sistema, nustatanti tarpusavio sąryšius tarp pirminių sąvokų, taip netiesiogiai apibrėžiant pirmines sąvokas ir pagrindinius sąryšius tarp jų. Aksiomų sistema apibrėžia ir operavimo su pagrindinėmis ir po jų einančiomis sąvokomis metodus. Toliau, remiantis visu tuo, įvedamos naujos sąvokos, formuluojami jų apibrėžimai, griežtai logine seka formuluojamos ir įrodomos teoremos, lemos, jų išvados. Taigi, jei logine prasme dedukcija – tai išvedimas, tai matematine prasme ji – pagrindimas, naudojant analitinį ir sintetinį įrodymo būdus, pilnąją bei matematinę indukciją.

4. DEDUKCIJA MOKANT MATEMATIKOS MOKYKLOJE

Pradiniame matematikos kurse griežti įrodymai nevartojami, tad dedukciją taikyti čia galima labai ribotai. V klasėje įrodymų dar taip pat nėra, tačiau čia vis atkakliau iš mokinių reikalaujama paaiškinti kiekvieną taisyklę pavyzdžiais. Dedukcijos vaidmuo išauga, pradėjus mokytis algebros, o ypač – geometrijos. Moksliniame elementariosios geometrijos kurse paprastai naudojama nepriklausomų aksiomų sistema, tačiau mokykliniame kurse kartais naudojamos ir priklausomos aksiomos, t. y. tokios, kurias moksliniame kurse galima įrodyti kaip teoremas. Tai daroma dėstymui suprastinti. Pvz., Archimedo iš Sirakūzų (*Archimēdēs*, apie 287–215 pr. Kr.) aksioma: ,,Tiesės atkarpa yra trumpiausia iš visų linijų, kurios jungia jos galus" iš esmės yra teorema, bet ji ir dabar mokykliniame elementariosios geometrijos kurse naudojama kaip aksioma.

Pirmieji bandymai taikyti dedukcinį metodą ir mokiniams, ir mokytojams yra nelengvi. Mokiniai jau ilgai mokykloje mokėsi taikyti nepilnąją indukciją: stebėjimai, bandymai, patikrinimai buvo pagrindas išvedant naujas taisykles. Todėl jiems dažnai nesuprantama pati įrodymo idėja, nes pirmosios teoremos dažnai jiems atrodo aiškios, teisingos be jokių papildomų įrodymų. Kadangi įrodymų būdai yra įvairūs ir nėra jokių požymių, pagal kuriuos būtų galima numatyti įrodymo būdus, tai irgi sukelia nemaža sunkumų.

5. AKSIOMŲ ĮVEDIMAS

Pvz., aksioma: „Jei du dydžiai lygūs vienam ir tam pačiam dydžiui, tai jie yra lygūs tarpusavyje" gali būti aiškinama paėmus tris vienodos talpos indus ir perpilant vandenį iš vieno indo į kitą.

Toks aksiomų mokymas padės suprasti kiekvienos iš jų esmę, užtikrins mokymo sąmoningumo principo realizavimą, padės lengviau įsiminti aksiomų formulavimą, atskleis jų pritaikymo įrodymuose būdus. Naudingi ir pratimai, kuriuose aksiomos taikomos:

1) Atkarpos AB = MN, CD = MN. Kokią išvadą galima padaryti apie atkarpas AB ir CD? Kodėl?
2) Tiesėje iš eilės pažymėti taškai A, B, C ir D. AB = CD. Įrodyti, kad AC = BD.
3) Tiesėje iš eilės pažymėti taškai M, N, P ir Q. MP = NQ. Įrodyti, kad MN= PQ.
4) $\angle$ ABC, $\angle$ CBD ir $\angle$ DBE turi bendrą viršūnę. $\angle$ ABC = $\angle$ DBE.
   Įrodyti, kad $\angle$ ABD = $\angle$ CBE.
5) Apskritimo lanke iš eilės pažymėti taškai A, B, C ir D. $\cup$ AC = $\cup$ BD.
   Įrodyti, kad $\cup$ AB = $\cup$ CD.

6) Tiesėje iš eilės pažymėti taškai A, B, C ir D. AB > CD.
Įrodyti, kad AC > BD [138, p. 51–52].

6. PIRMIEJI ĮRODYMAI

Dažnai mokinys negali suprasti ir įsiminti teoremos įrodymo dėl to, kad įrodymas klasės lentoje pateikiamas su jam nesuprantamu užrašymu ir šio užrašymo turinio fiksavimas užgožia jam įrodymo esmę, t. y. forma užgožia turinį. Todėl vaikus reikia įpratinti prie užrašymo, naudojamo teoremų įrodymuose dar iki pirmųjų teoremų įrodymo. Ypač patogi tam medžiaga yra veiksmai su atkarpomis ir kampais.

Pvz., nubraižius dvi laužtes ABCDE ir KLM, atsakoma į klausimą, kuri iš jų ilgesnė. Su liniuote ir skriestuvu fiksuojami jų ilgiai: AB + BC + CD + DE = PQ, KL + LM = RS ir palyginami, apskaičiuojamas jų skirtumas.

Veiksmams su atkarpomis rekomenduotina atlikti pratimus, atitinkamai jų atlikimą užrašant:

1) Apskaičiuoti atkarpų AB ir CD sumą.
2) Braižymo būdu įsitikinti, kad aukščiau duotų atkarpų suma nepriklauso nuo jų sudėjimo tvarkos.
3) Apskaičiuoti trijų atkarpų AB, CD ir EF sumą.
4) Parodyti, kad aukščiau duotų atkarpų sumai galioja sudėties jungimo dėsnis.
5) Duotas Δ ABC. Nubrėžti atkarpą, lygią jo perimetrui.
6) Tegul atkarpa AB > CD. Nustatyti jų skirtumą.
7) Duoti Δ ABC ir Δ DEF. Kiek vieno jų perimetras didesnis už kito?
8) Duota atkarpa AB. Nubrėžti atkarpą MN = 3 AB.
9) Duotos atkarpos a ir b. Nubrėžti atkarpą $x = 4\ a + 3\ b$.
10) Nubrėžti atkarpą $x = 3\ c - 2\ d$, kur c ir d – duotos atkarpos.
11) Atkarpą AB padalyti pusiau.
12) Apskaičiuoti atkarpos c ketvirtąją dalį.
13) Nubrėžti atkarpą $x = \frac{3}{4}\ a + \frac{1}{2}\ b$, kur a ir b – duotosios atkarpos.
14) Duotos atkarpos m, n ir p. Nubrėžti atkarpą $x = 5\ m + \frac{3}{4}\ n - \frac{1}{2}\ p$ [138, p. 52–53].

Išmokius vaikus naudotis matlankiu (išmatuoti kampo didumą ir nubrėžti duotojo didumo kampą), reikia jiems duoti pratimų:

1) Nubrėžti kampą, lygų $\angle$ ABC ir $\angle$ DEF sumai.
2) Apskaičiuoti $\angle$ 1, $\angle$ 2 ir $\angle$ 3 sumą.
3) Nubrėžti kampą, lygų Δ ABC kampų sumai.
4) Tegu $\angle$ A > $\angle$ B. Nustatyti jų skirtumą.
5) Nubrėžti kampą, lygų $\angle$ A + $\angle$ B - $\angle$ C, kur kampai A, B, C yra duoti.

6) Duotas ∠ K. Nubrėžti ∠ M = 3 ∠ K.

7) Nubrėžti ∠ M = 4 ∠ ABC - 3 ∠ DEF.

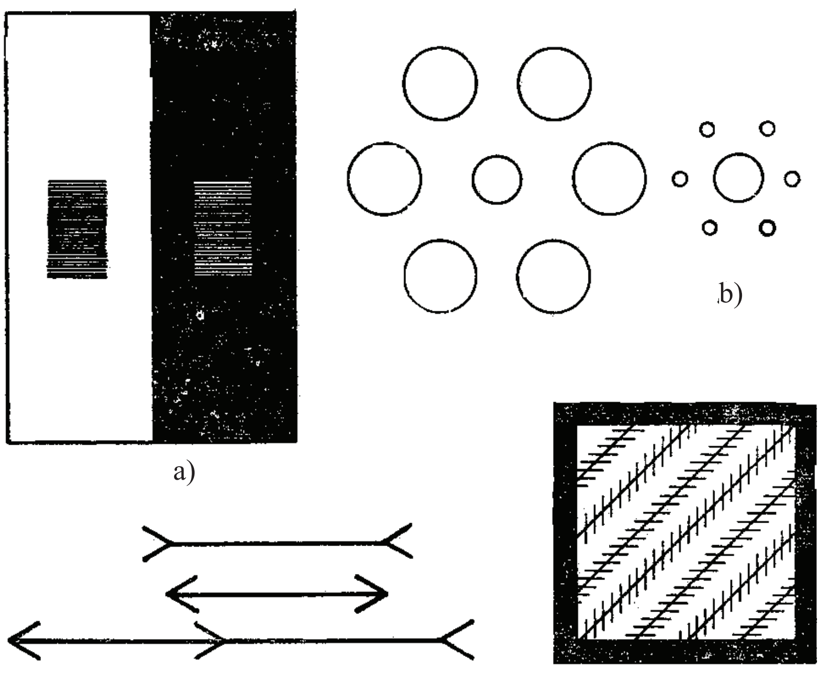
8) Nubrėžti kampą, lygų pusei, trečdaliui, ketvirtadaliui ∠ 1.

9) Nubrėžti kampą, lygų ¾ ∠ A.

10) Nubrėžti ∠ N = 2 ∠ ABC - ½ ∠ DEF [138, p. 53].

Tokie pratimai suformuoja mokinių įgūdžius atlikti operacijas su paprasčiausiais geometriniais objektais ir mokėjimus fiksuoti tas operacijas brėžiniais bei užrašymu. O tai padės lengviau suvokti pirmųjų teoremų įrodymus. Beje, apie tai nemažai rašė daug metų dabartiniame Šiaulių universitete matematikos didaktiką dėstęs Juozas Revuckas (1924–1991) [7].

Kadangi pirmosios teoremos vaikams atrodo aiškios be įrodymų, reikia jiems parodyti, kad vadinamasis aiškumas yra apgaulingas. Tam padeda elementarių regėjimo iliuzijų [128, p. 107] demonstravimas (25 pav.):



a) b) c) d)

25 pav.

Atveju a) turime du lygius stačiakampius, nors atrodo, kad pirmasis yra didesnis. Atveju b) viduriniai skrituliai yra lygūs, nors atrodo, pirmasis yra mažesnis. Atveju c) viršutinė ir antroji iš viršaus atkarpos yra lygios, nors atrodo, kad viršutinė ilgesnė. Tą patį galima pasakyti ir apie šių atkarpų sumą: kairioji apatinės atkarpos dalis atrodo esanti mažesnė už dešiniąją, nors iš tiesų jos yra lygios. Atveju d) visos 6 kvadrate esančios įstrižos atkarpos yra lygiagrečios, nors taip neatrodo. Po tokių pavyzdžių vaikus lengviau įtikinti, kad ne visada galima tikėti tuo, ką nustatome stebėjimo keliu, reikia tai tikrinti. O įrodymas – tai patikrinimas.

Kartu vaikams reikia parodyti, kad stebėjimą ar bandymą ne visada galima atlikti. Pvz., daug ką galima atlikti popieriaus lape, lentoje, tačiau tai ne visada galima atlikti dideliame Žemės paviršiaus plote.

Kartu bet koks bandymas gali būti atliktas tik su dalimi kurios nors rūšies figūrų. O įrodymas priskiria tam tikras savybes visoms kokios nors rūšies figūroms.

Visi šie paaiškinimai padeda vaikams suvokti dedukcinių metodų esmę, o stebėjimai ir bandymai toliau lieka euristiniais metodais, padedančiais sukurti problemines situacijas, kurios išsprendžiamos pasinaudojant dedukciniais įrodymais.

Kadangi teoremų įrodymo būdai yra įvairūs, ir nei vadovėlis, nei mokytojas negali mokiniams duoti nurodymo, kuris būdas tinka teoremai įrodyti vos tik ją suformulavus, todėl susitikimui su kiekvienu nauju įrodymo būdu mokiniai turi būti kruopščiai parengti. Tai atlikti būtina tam, kad įrodymą mokiniai įsisąmonintų, suvoktų, kad tai naujas būdas, suvoktų jo esmę, etapus, ypatybes. Tai padės jiems šį būdą taikyti kitose situacijose. Tam padeda įrodymo uždaviniai, kuriuose šis naujas būdas yra taikomas. Apie tai irgi nemažai rašė aukščiau minėtas J. Revuckas [7]. Supažindinant su naujais įrodymo būdais kartais naudojami modeliai, uždėjimas, pasukimas ir t. t.

Kartais sakoma, kad pereinant prie algebros ir geometrijos mokymosi, mokinių sąmonėje įvyksta šuolis: indukcinis mąstymas keičiamas į dedukcinį. Matematikos didaktikos, mokytojo uždavinys – palengvinti šį perėjimą, išvengti labai ryškaus šuolio.

Pats „įrodymo“ terminas įvairiems žmonėms turi įvairią prasmę. Todėl jau supažindinant su pirmosiomis teoremomis būtina, kad mokiniai aiškiai įsivaizduotų matematinio įrodymo struktūrą ir pagrindinius būdus.

Taigi, jei mokiniai turi įrodyti kokį nors matematinį teiginį, tai: 1) tie faktai ir santykiai, kurie pateikti teoremos sąlygoje, laikomi teisingais; 2) nuo sąlygos prie išvados turi atvesti logiškai nuosekli teiginių grandinė, kiekvienas šių teiginių turi būti pagrįstas teiginiais, pateiktais sąlygoje, taip pat jau žinomų sąvokų apibrėžimais, aksiomomis ir anksčiau įrodytais teiginiais; 3)išvada yra paskutinė grandis šioje logiškai išdėstytoje grandinėje.

Jei laikysime, kad teoremos sąlyga teisinga, taip pat teisinga visa pateiktoji įrodyme teiginių grandinė, tai ir išvada turi būti laikoma teisinga.

Reikia skatinti mokinius savarankiškai atrasti ir pagrįsti teoremoje išreikštus faktus. Pvz., trikampių lygumo požymius mokiniai gali lengvai atrasti savarankiškai spręsdami brėžimo uždavinius. Tačiau trikampių panašumo požymiai taip lengvai mokinių nebus atrasti, čia be išsamaus mokytojo aiškinimo apsieiti negalima.

Norint sužadinti nuolatinį mokinių interesą matematikai, stimuliuoti jų aktyvumą ir sukelti poreikį logiškai įrodyti teoremas, naudinga kartais prieš kai kurių teoremų įrodymą spręsti praktinius uždavinius. Pvz., prieš nagrinėjant pirmuosius du trikampių lygumo požymius galima vietovėje rasti atstumą tarp 2 taškų, kada tiesiogiai surasti tą atstumą yra neįmanoma (pvz., taškus skiria upė, pelkė ir pan.). Panašiai geometriją siūlė dėstyti S. Šochoras–Trockis [148], Antanas Busilas (1889–1951) [12, 13].

Tačiau metodiniu požiūriu nėra tikslinga visą mokyklinį matematikos kursą remti vien „tikslingų uždavinių metodu“, kaip jį įvardijo S. Šochoras–Trockis. Pirmiausia, jis neekonomiškas laiko atžvilgiu, antra, darbas bus varginančiai nuobodus.

Tačiau kai kada tikslinga prieš kai kurių teoremų įrodymą pateikti mokiniams abstrakčių uždavinių, kurių sprendimas gali padėti savarankiškai suformuluoti reikiamą teoremą. Būtina pastebėti, kad tokius uždavinius reikia formuluoti pakankamai plačiai, neįspraudžiant mokinių į bereikalingų sąlygų rėmus, pvz.: 1) Nustatyti trikampio kraštinių tarpusavio priklausomybę. 2) Kokią savybę turi lygiašonio trikampio viršūnės kampo pusiaukampinė? 3) Nustatyti priklausomybę tarp kampų, kuriuos sudaro lygiagrečiosios tiesės ir jų kirstinė ir pan.

Teoremų įrodymų pagal galimybes reikia nepateikinėti gatavų: siekti, kad mokiniai patys „atrastų“ įrodymus.

Labai naudinga panaudoti specialius modelius (pvz., stačiakampio, kvadrato, rombo įstrižainių savybes nesunkiai pademonstruojame sulenkdami popierinius jų modelius per įstrižaines).

7. TEOREMŲ ĮRODYMO TAISYKLĖS

Įrodyti teoremą reiškia remiantis teiginiais, jau žinomais kaip teisingais, parodyti, kad išvada logiškai išplaukia iš sąlygos. Kitais žodžiais, teoremos įrodymas yra įrodymas to fakto, kad, jei tenkinama jos sąlyga, tai iš jos logiškai išplaukia jos išvada, t. y. leidus, kad teiginys p yra teisingas, stengiamasi įrodyti, kad teiginys q yra irgi teisingas ir taip įrodyti, kad ir sudėtinis implikacinis teiginys $p \rightarrow q$ irgi yra teisingas.

Teisingais laikomi teiginiai, jei jie: a) yra sąlygos dalis ar tiesiogiai išplaukia iš jos; b) yra dalys apibrėžimų sąvokų, apie kurias kalbama teoremoje, arba kurių apibrėžimai panaudojami įrodyme; c) išplaukia iš anksčiau įrodytų teoremų. Tačiau mokykloje ne visada griežtai laikomasi šių sąlygų. Kai kurie faktai įrodymuose priimami tik pasitelkiant vaizdumą.

Patys matematiniai įrodymai diktuoja tam tikras taisykles, kurių būtina laikytis juos atliekant. Įrodymas – loginis perėjimas nuo teoremos sąlygos prie išvados. Kad šį perėjimą sėkmingai atliktume, *reikia įsisąmoninti, kokia yra teoremos sąlyga ir kokia išvada* (I įrodymo taisyklė). II taisyklė: *įrodymo procese būtina visiškai panaudoti teoremos sąlygą*. Kadangi kiekvienas įrodymas remiasi anksčiau įrodytais ar kitaip priimtais teiginiais, todėl, *prieš įrodinėjant naują teoremą, būtina pakartoti tuos teiginius, kuriais bus remiamasi įrodyme* (III taisyklė). *Įrodymo metu būtina prisiminti įrodyme figūruojančių sąvokų apibrėžimus* (IV taisyklė). *Kadangi tos pačios sąvokos apibrėžimai gali kartais būti įvairiai suformuluoti, tai įrodyme reikia naudotis ta formuluote, kuri labiausiai atitinka esamą situaciją* (V taisyklė). Pvz., kvadratas apibrėžiamas kaip rombas ir kaip stačiakampis, todėl reikiamoje vietoje gali būti panaudotas vienas ar kitas apibrėžimas. Kai kuriuose įrodymuose būna situacijų, kai reikia taikyti ne patį sąvokos ar sąryšio apibrėžimą, bet jų charakteringąsias savybes. Tokiu atveju ši savybė pakeičia apibrėžimą. Pvz., kartais vietoje trikampių lygumo apibrėžimo pasinaudojama kuriuo nors lygumo požymiu; vietoje lygiagretainio apibrėžimo pasinaudojama kuriuo nors jo požymiu. Taigi VI įrodymo taisyklė yra: *įrodymo procese kurios nors sąvokos apibrėžimas kartais pakeičiamas teorema, išreiškiančia tos sąvokos charakteringąją savybę.*

Teoremų įrodymo būdai yra įvairūs.

Vienas iš labiausiai paplitusių įrodymo būdų – teoremos sąlygos perdirbimas tokiu būdu, kad išvada aiškiai išplauktų iš sąlygos. Paprasčiausiose teoremose pakanka vieno sąlygos perdirbimo, sudėtingesnėse – reikia tokių perdirbimų serijos.

Kitais atvejais teorema gali būti įrodoma perdirbant išvadą.

Istorinėje matematikos raidoje daugelis teoremų buvo įrodytos kaip įrodymo uždaviniai. Tai kartais naudinga daryti ir mokymo procese: tai teoremas labiau susieja su realiu gyvenimu; pradžioje teoremos nereikia griežtai suformuluoti; tai sustiprina euristinį ir susilpnina dogmatinį mokymo elementus. Toks įrodymo būdas ypač naudingas mokant figūrų plotų, kūnų paviršių ir tūrių apskaičiavimų geometrijoje. Taip išvedama ir kvadratinių lygčių šaknų suradimo formulė algebroje.

Mokant teoremų įrodymo, nereikia skubėti jas formuluoti. Paprastai dėstymas pradedamas nuo teoremos formulavimo tada, kai teoremos formuluotė nesudėtinga. Pasakius teoremą 2–3 kartus, mokiniai prašomi nurodyti jos sąlygą ir išvadą. Tačiau, jei teoremos formuluotė sudėtinga, geriau pirma nubrėžti figūrą, lentoje simboliškai užrašoma teoremos sąlyga ir išvada, tik tada formuluojama pati teorema; kartais ji formuluojama ir įrodymo pabaigoje.

8. MOKYMAS ĮRODINĖTI TEOREMAS

Prieš pradedant ko nors mokyti, reikia gerai išaiškinti esmę to, ko mes norime mokyti (mokymo objektą). Todėl reikia gerai išsiaiškinti pačios įrodymo sąvokos esmę.

Šis išsiaiškinimas – ne metamatematinis (gr. „*meta*“ – už, po) įrodymo sąvokos tyrimas, o tik trumpas šios sąvokos mokslinio traktavimo aprašymas. Jis būtinas tam, kad kuo aiškiau įsivaizduotume tai, kiek: 1) mokykliniai įrodymai yra tolimi griežtiems moksliniams įrodymams; 2) žalingos tradiciškai sukuriamos griežtumo iliuzijos ten, kur iš tiesų yra tik margas intuicijos ir logikos mišinys; 3) naudingiau tiesiai mokiniams pasakyti, kad mes priimame kurį nors teiginį be įrodymo (nors jis gali būti įrodomas), negu duoti netinkamą ar nesuprantamą įrodymą. Kartu tai būtina ir tam, kad įsivaizduotume ir tai, kaip kurti įrodymų mokymo metodiką.

Griežtai apie įrodymus kalbėti galima tik priėmus kokią nors aksiomų sistemą. Priėmus pagrindines sąvokas ir aksiomų sistemą bei pasirinkus atitinkamą loginę sistemą, visi kiti teiginiai įrodomi. Tokioje teorijoje įrodymas – baigtinė seka šios teorijos teiginių, kurių kiekvienas yra arba aksioma, arba anksčiau įrodytas teiginys. Įrodymo rezultatas – teorema.

Įrodymų mokymu suprantame mokymą atlikti tokius mąstymo procesus: įrodymo ieškojimą, jo atradimą ir konstravimą, o ne mokymą išmokti ir atgaminti gatavus įrodymus. Mokyti įrodymų – reiškia pirmiausia mokyti samprotauti, o tai vienas iš svarbiausių mokymo apskritai uždavinių.

Mokant įrodymų, būtina atsižvelgti į tai, kad: 1) mokyklinis matematikos kursas nei viename savo etape nėra sukurtas kaip formalioji dedukcinė sistema ir visada lieka kokio nors realaus turinio rėmuose; 2) mokykliniuose įrodymuose yra būtini intuicijos elementai; 3) loginio įrodymo poreikis geriau paaiškinamas atitinkamais pavyzdžiais, sudarytomis situacijomis. Pats įrodymo ieškojimas remiasi trimis pagrindiniais klausimais: „Kas? Iš kur? Kaip?“

Pirmasis klausimas padeda išanalizuoti problemą: kas įrodoma, koks yra įrodomasis teiginys, kaip jis formuluojamas, ar viskas šioje formuluotėje suprantama, ar negalima formuluoti kitaip, kas yra duota, ką reikia įrodyti. Įrodomąjį teiginį geriausia išreikšti implikacinio teiginio forma, tai padės geriau išaiškinti, kur teoremos sąlyga, kur išvada. Reikia išsiaiškinti ir papildomas sąlygas.

Antrasis klausimas siekia išsiaiškinti, iš kokių prielaidų išplaukia įrodomas teiginys, kokiais jau žinomais teiginiais remiantis galima įrodyti naująjį teiginį. Yra du įrodymo ieškojimo metodai: a) galima eiti nuo įrodomojo teiginio prie argumentų (aksiomų, apibrėžimų, teoremų), kuriais remiantis teiginys įrodomas („judėjimas atgal“); b) ėjimas nuo argumentų prie įrodomojo teiginio („judėjimas pirmyn“). Pastarojo metodo taikymas yra susijęs su dideliais sunkumais ir jo vieno nepakanka tam, kad savarankiškai surastume įrodymą. Iš tiesų, kaip galima atspėti, nuo kokių aksiomų, apibrėžimų ar teoremų reikia pradėti įrodymą? Atspėti dažniausiai padeda pirmojo metodo taikymas.

Trečiasis klausimas padeda išsiaiškinti kaip įrodomasis teiginys išvedamas iš argumentų. Čia mokykloje išskirtini du lygiai. Pagrindinėje mokykloje pačios įrodymo taisyklės lieka neišaiškintos, jos taikomos neišreikštine forma, daugiausia dėmesio skirta išaiškinti tam, kas yra įrodoma ir kuo remiantis įrodoma. Šiame lygyje įrodymas nagrinėjamas kaip intuityvus svarstymas, kurio metu įrodomojo teiginio teisingumas remiamas argumentų teisingumu. Antras lygis – baigiamosiose klasėse įrodymo sąvoka turi būti patikslinta, išaiškinus mokiniams paprasčiausias įrodymo taisykles (žr. aukščiau, p. 126). Šiame lygyje mokiniams tampa prieinama įrodymo analizė, jo loginės struktūros ir įrodymo taisyklių išaiškinimas.

Įrodymo sąvokos patikslinimas gali būti pasiektas pateikus įrodymą apibrėžta standartine forma, kurią galima tiksliai aprašyti. A. Stoliaras pateikia tokį aprašymą [141]. Juo remiantis, teoremos t įrodymu laikoma baigtinė seka teiginių $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$, priklausančių atitinkamai teorijai, kuri tenkina dvi sąlygas: a) kiekvienas šios sekos teiginys yra arba aksioma, arba apibrėžimas, arba anksčiau įrodyta teorema, arba prielaida (įrodomosios teoremos sąlyga), arba gaunamas iš prieš einančių teiginių, remiantis viena iš išvedimo taisyklių; b) paskutinis šios sekos teiginys yra teiginys t. Šis teiginys yra teorema, jei jam gali būti sukonstruotas bent vienas įrodymas, t. y. rasta bent viena teiginių seka, tenkinanti abi minimas sąlygas a) ir b). Šia standartine išraiška nebūtina nuolat naudotis. Tačiau ji padeda atskleisti kai kurias klaidas, dažnai pasitaikančias įrodymuose. Tos klaidos būna susiję su įrodymuose panaudojamomis anksčiau neįrodytomis teoremomis ar neteisingomis išvedimo taisyklėmis.

9. LOKALINIS LOGINIS SUTVARKYMAS

Tai sutvarkymas, atliekamas kurioje nors vienoje temoje. Ypač jis taikytinas pagrindinėje mokykloje, nes taip mokiniai rengiami suprasti visos teorijos aksiomatizavimą. Deja, mokykloje nei vienas iš aptartųjų aspektų nėra mokymosi objektas ir būtent tuo yra paaiškinami sunkumai, susiję su aksiominio metodo taikymu mokykloje.

10. AKSIOMINIS METODAS MOKANT MATEMATIKOS

Beveik nuo XX a. pradžios tęsėsi diskusijos šiuo klausimu. Jose buvo keliami įvairiausi pasiūlymai. Juos galima sugrupuoti į 3 grupes: 1) mokyti aksiominiu pagrindu parengto matematikos kurso; 2) nei viename mokymo etape neatskirti logikos nuo intuicijos, bet teisingai jas derinti, aišku, skirtingai skirtinguose etapuose; 3) aksiominiu būdu pateikti tik nedidelį teorijos fragmentą vyresniosiose klasėse tam, kad būtų galima supažindinti mokinius su aksiominiu metodu, o viso kurso mokyti taip, kaip rekomenduojama II grupės pasiūlymuose. Mažiausia šalininkų turėjo I grupės pasiūlymai, daugiausia – III grupės.

Aksiominio metodo taikymo mokant matematikos problemos tyrimą tikslinga suskaidyti į dvi problemas: 1) aksiominis metodas kaip mokyklinio kurso sukūrimo būdas, kartu išsiaiškinant tikslingą loginį lygį kiekviename mokymo etape, kad šis lygis: a) būtų prieinamas mokiniams; b) padėtų toliau ir greičiau jiems vystyti loginį mąstymą); 2) aksiominis metodas, kaip mokymosi objektas (parenkant konkrečią medžiagą, kuri padėtų vyresniųjų klasių mokinius supažindinti su šiuolaikiniu aksiominiu metodu, bei parengiant tokio supažindinimo metodiką).

Įdomiai šiuo klausimu pasisakė estų pedagogas matematikas K. Ariva (*Ariva*) [117]. Jo mintis koncentruotai ir pateikiame žemiau.

Daugelis teiginių mokyklinėje matematikoje lieka neįrodyti ir laikomi teisingais tik dėl vaizdumo ar pan., o daugelis sąvokų laikomos žinomomis be tikslių apibrėžimų. Tad tuos teiginius irgi galėtume laikyti aksiomomis, o sąvokas – pradinėmis. Ir atskleisti visa tai būtų galima tik pasinaudojant visa aksiomų sistema. Vidutiniojo mokyklinio amžiaus klasėse tai neįmanoma. Aksiominio metodo taikymas galimas tik vyresniosiose klasėse ir tik aktyvaus mokymo sąlygomis, kai metodo esmė atskleidžiama jį taikant. Yra du būdai, kaip tai būtų galima atlikti.

Pirmas, istoriškai pirmesnis, *klasikinis*, remiasi loginiu būtinumu: kiekviena dedukcinė teorija turi prasidėti nuo neapibrėžiamų, pradinių sąvokų, ir neįrodomų teiginių – aksiomų. Aksiominio metodo tikslas ilgą laiką buvo logiškai sutvarkyti nagrinėjamos teorijos sąvokas ir teiginius, o po to imta nagrinėti ir jos loginius pagrindus. XX a. būtent antrasis aspektas tapo esminiu. Tradicinis mokymas mokykloje irgi remiasi klasikiniu požiūriu į aksiominį metodą. Pradinių sąvokų ir aksiomų įvedimo motyvas ir čia yra loginis būtinumas: negalėjimas apibrėžti visų sąvokų ir įrodyti (ar paneigti) visų teiginių. Iš esmės tai remiasi absoliutaus loginio griežtumo reikalavimu. Bet, kadangi absoliutus loginis griežtumas mokykloje neįmanomas, tai reikalauti jo – tuščias reikalas, nesuprantamas daugeliui mokinių. Žiūrint iš logikos pozicijų, mokomosios medžiagos nagrinėjimas mokykloje neišvengiamai fragmentiškas – logika ir vaizduotė dirba greta viena kitos, ypač mokant geometrijos, ir aksiominio metodo esmė lieka neaiški. Rimta kliūtis tikrai, sąmoningai įsisavinti aksiominį metodą mokykloje yra atotrūkis, net prieštaravimas tarp teorinio metodo aprašymo ir jo taikymo mokyklos darbo praktikoje.

Aukščiau minėtas neįrodomumo principas neapibrėžia aksiomos sąvokos pakankamai giliai. Nepašalinamas įsivaizdavimas, kad aksiomų ir pradinių sąvokų ypatybes lemia kokios nors vidinės savybės, o ne išoriškai sąlygoti santykiai. Aksiomos teisingumas šiomis sąlygomis sunkiai paaiškinamas. Lieka neaišku, koks yra pradinių sąvokų turinys, sąvokos be turinio mokykloje mokiniams yra sunkiai suvokiamos. Taigi klasikinis požiūris mokykloje nelabai tinka. Jis svarbus tik matematikos specialistams, gyvenimiškas jo taikymas yra abejotinas. Kad pasiektume vieną iš pagrindinių matematikos mokymo tikslų – išmokyti moksleivius logiškai mąstyti, nebūtina nagrinėti dedukcijos pagrindus, o pernelyg griežti reikalavimai laikytis logikos dėsnių gali būti netgi labai žalingi. Mokykloje pakanka remtis tik lokaliąja dedukcija, susieta su mokinių amžiumi ir gebėjimais.

Aksiominį metodą galima paaiškinti ir kitu būdu – nagrinėjant įvairias teorijas, kurios tam tikrais bruožais yra panašios. Išskyrus sutampančius bruožus ir pavadinus juos sąlygomis, apibrėžiančiomis kokį nors naują darinį, galima remiantis šiomis sąlygomis kaip aksiomomis, leidžiančiomis sukurti bendresnę teoriją, kurioje pradinės teorijos ar jų dalys yra daliniai atvejai, arba, kaip sakoma, konkretūs modeliai. Šis požiūris išplėtotas XX a. ir todėl jį galima pavadinti *šiuolaikiniu*. Šiuolaikinis požiūris leidžia nagrinėti ir vystyti teoriją kiek galint suprastintoje aplinkoje, iš kurios eliminuotos visos pašalinės nepriklausančios teorijai aplinkybės, esančios modeliuose. Kadangi visi gautieji rezultatai automatiškai tinka visiems modeliams, tai jie tinka ir tiems modeliams, kuriuos egzistuojant dar niekas net neįtaria. Iš kitos pusės, kaip tik pašalinės aplinkybės, susiję tik su vienu modeliu, gali sukelti kai kuriuos intuityvius vaizdinius, gali padėti numatyti ir kartu nurodyti kelius naujiems atradimams modeliuose, neturinčiuose atitinkamų pašalinių aplinkybių. Jungiančioji grandis, egzistuojanti tarp skirtingų modelių – aksiomatika. Taigi aksiominio modelio metodas – šiuolaikinės matematikos įrankis. Su tokiu nauju požiūriu į aksiomatiką yra susijusi *struktūros* sąvoka, kurią įvedė prancūzų matematikų grupė, pasivadinusi kolektyviniu pseudonimu Nikola Burbaki (*Bourbaki*). Matematinė struktūra – aibė (arba aibių aibė) su tam tikrais santykiais, kurie duotajai struktūrai yra pagrindiniai, ir apibrėžiamais tam tikromis sąlygomis – šios struktūros aksiomomis. Pagrindiniai santykiai ir pagrindiniai objektai (nagrinėjamos aibės elementai), o ir pati aibė – pradinės struktūros sąvokos. Pradinių sąvokų turinys aksiomomis apibrėžiamas nevienareikšmiškai, lieka tam tikras neapibrėžtumas: šios struktūros modeliai yra visos tos ir tik tos aibių ir santykių aibės, kurios tenkina šios struktūros aksiomas. Pvz.: grupė, žiedas, kūnas, laukas, vektorinė erdvė ir tiesinė algebra – algebrinės struktūros, pagrindiniai jų santykiai – algebrinės operacijos. Realiųjų skaičių laukas su sudėties ir daugybos operacijomis – tolydaus lauko modelis, o orientuotų atkarpų, išdėstytų erdvėje, su vidine sudėties ir išorine daugybos iš realiojo skaičiaus operacijomis, laukas – trimatės vektorinės erdvės modelis.

Struktūras tiria visi mokslai, o matematika – bendroji struktūrų teorija. Čia ir yra matematikos universalumo ir galios, jos gilios vienybės šaltinis. Vienos struktūros, nagrinėjamos matematikoje, yra labai paprastos ir todėl ypač bendros, su begaline modelių (interpretacijų) aibe, pvz.: sutvarkyta aibė, grupė, topologinės ir metrinės aibės. Kitos – sudėtingesnės ir mažiau bendros struktūros, sukurtos iš paprastesnių, fundamentinių struktūrų, panaudojant kai kurias jungiančiąsias aksiomas. Fundamentinės struktūros – savotiškos statybinės detalės matematikos pastatui sukurti. Visos klasikinės matematikos teorijos, pvz., realiųjų skaičių teorija ir euklidinė geometrija yra susikertančios. Susikirtimuose susiduria ir tarpusavyje sąveikauja įvairiausios matematinės struktūros, turinčios kur kas bendresnį pobūdį. Struktūrų, nagrinėjamų matematikoje, visuma sudaro sudėtingą hierarchiją su daugybe sankirtų ir subordinacijų. Tuo ir pasireiškia vidinė matematikos struktūra, jos „architektūra“.

Neišreikštine forma daugelis svarbių matematinių struktūrų nagrinėjamos ir mokykloje. Struktūros vaidmens šiuolaikinėje matematikoje įsisąmoninimas suponuoja poreikį duoti mokiniams žinių apie struktūros koncepciją.

Struktūros tyrime yra 3 fazės: *aksiomatizavimas*, *dedukcija* ir *interpretacija* (lot. „*interpretatio*“ – aiškinimas). Aksiomatizavimo tikslas – adekvačiau ir kaip galima paprasčiau apibrėžti struktūrą. Pradinis taškas – daliniai atvejai, apibrėžiamos struktūros modeliai. Abstrahuojantis nuo šių modelių kilmės ir nuo savybių, skiriančių juos, išsaugoma tik tai, kas juose yra bendra. Dedukcija – struktūros vystymas, naujų objektų (išvestinių sąvokų) apibrėžimas ir teoremų įrodymas, aprašant santykius šių objektų aibėse. Interpretacija – gautos teorijos taikymas naujiems daliniams atvejams.

Formuojant natūraliojo skaičiaus sąvoką, palyginamos žinomų objektų aibės ir, abstrahuojantis nuo jų prigimties, gaunama skaičiaus sąvoka, remiantis abipus vienareikšme atitiktimi tarp aibių; po to naudojamasi abstrakčiais skaičiais bet kurioms konkrečioms baigtinėms aibėms aprašyti. Nagrinėjant kvadratines lygtis su skaitiniais koeficientais, apibrėžiama bendroji kvadratinė lygtis su abstraktesniais (raidiniais) koeficientais, išvedama jos sprendimo formulė, kuri taikoma bet kurių konkrečių lygčių sprendimui. Aišku, aksiominiu metodu čia nesinaudojama.

Neabejotinai reikia išvystyti mokinių loginį mąstymą tiek, kad jie suprastų poreikį naudotis aksiomatizavimu. Visiškai teisėta yra tai laikyti įmanomu dalyku, jei tik nesupriešinsime aksiomatizavimo ir jau perprastų veiksmų, kaip kažko naujo, o, priešingai, kuo daugiau remsimės intuicija, mokinių mokėjimais ir įgūdžiais.

Nesunku pastebėti, kad tarp struktūros tyrimo ir matematinio modeliavimo yra glaudus ryšys: modelio sukūrimas, tyrimas ir interpretacija. Pavyzdys – uždavinių sprendimas, sudarant lygtį iš sąlygos. Aksiominis metodas – aukščiausia, labiausiai organizuota vidinio matematinio modeliavimo forma. Modeliavimas – matematikos esmė ir jos mokymas – tai mokymas modeliuoti.

11. AKSIOMINIS METODAS, KAIP MOKYKLINIO KURSO SUKŪRIMO BŪDAS

Vaikai geriausiai mokosi tada, kai jie pasinaudoja savo patyrimu, tirdami įvairiausias konkrečias situacijas. Mes galime juos atvesti prie matematinio tokių situacijų aprašymo, t. y. padėti jiems sukurti tokių situacijų matematinius modelius, o po to nagrinėti tokių modelių struktūrą. Taip sukuriama bazė tolesniam aksiominės sistemos įsisavinimui. Tačiau jau išsiaiškinome, kad jokiame mokymo etape nei visas mokyklinis matematikos kursas, nei kokia nors jo dalis negali būti nagrinėjamas kaip abstrakti formali struktūra be jokios realios interpretacijos, t. y. mokyme mokykloje gali būti realizuota tik turinti realų turinį aksiomų sistema. Esant tokiam realiam turiniui aksiomos ir teoremos nagrinėjamos kaip turintys realų turinį teiginiai apie realius teorijos objektus, o pats loginis išvedimas laikomas intuityviai suprantamu.

Iš esmės toks aksiominio metodo supratimas egzistavo iki pasirodant Davido Hilberto (*Hilbert*, 1862–1943), vokiečių matematiko darbams. Daugelyje geometrijos aksiominio sukūrimo bandymų teorija buvo kuriama kaip tam tikros objektų sistemos aprašymas, aksiomos buvo suprantamos kaip savaime aiškūs teiginiai apie šiuos objektus ir aksiominės teorijos kūrimo uždavinys buvo sprendžiamas visus teorijos teiginius išvedant dedukciniu keliu, remiantis tomis aksiomomis.

D. Hilberto darbai davė pradžią pereiti nuo realaus turinio aksiomų sistemos prie formalaus aksiominės teorijos supratimo. D. Hilbertas savo aksiomų sistemą pagrindė tuo, kad, turint tris skirtingas objektų sistemas ir pirmosios sistemos objektus pažymint A, B, C, ... bei pavadinant juos taškais, antrosios sistemos objektai pavadinami tiesėmis ir žymimi *a*, *b*, *c*, ..., o trečiosios sistemos objektai pavadinami plokštumomis ir žymimi α, β, γ, ... Šių objektų sistemose įvedami santykiai: „priklauso“, „tarp“ ir kt. Vystant teoriją, aprašančią šios objektų aibės struktūrą su įvestais joje santykiais, visiškai nesidomima nei objektų prigimtimi, nei santykių prasme, o panaudojamos tik kai kurios formalios šių santykių savybės, sudarančios geometrijos aksiomų turinį. Taip visiškai „atsikratoma“ intuicijos. Intuicija nesivadovaujama ir dedukcijoje, nes toliau taikant aksiominį metodą prieita prie formalizavimo ir aksiomų taikymo logikoje, kuria naudojantis plėtojama aksiominė teorija.

Taigi yra trys aksiominių teorijų lygiai: 1) aksiominė teorija, turinti realų turinį ir aprašanti jį (konkrečios kilmės objektų aibė su konkrečią prasmę turinčiais santykiais); šią teoriją plėtojant naudojama intuityvioji logika; 2) pusiau formali aksiominė teorija, aprašanti objektus ir santykius, kurie gali turėti įvairią prigimtį, bet ją plėtojant dar naudojamasi intuityviąja logika; 3) formalioji aksiominė teorija, kuri kuriama laikantis apibrėžtos aksiominės logikos sistemos.

Visas aprašymas rodo, kad šiuolaikinis aksiominis metodas negali būti naudojamas mokykliniam kursui sukurti. Tačiau atskiri jo elementai tame kurse gali būti atspindėti. Kaip suprantamas tas atspindėjimas?

Šiuolaikiniame aksiominiame metode galima išskirti dvi puses: 1) teorijos abstrahavimas nuo konkrečių modelių; 2) dedukcinis teorijos sukūrimas be jokių interpretacijų, remiantis kokia nors aksiomų sistema.

Mokykloje gali būti realizuojama dedukcinė teorija, bet ne abstrakti, o panaudojanti kokį nors konkretų modelį. Kitais žodžiais, atspindima tik viena aksiominio metodo pusė, susijusi su loginiu matematinės medžiagos sutvarkymu, bet šis metodas negali būti realizuotas grynu pavidalu. Iš nemažo skaičiaus apibrėžtų intuityvių prielaidų (sudarančių aiškiai perteklinę ir kartu nepilną aksiomų sistemą) galima gauti, einant nuosekliu dedukciniu keliu, daug naujų rezultatų, kuriuos galima patikrinti remiantis konkrečia situacija, kuri pagimdė aukščiau minėtas prielaidas. Kartais galima tirti vienų prielaidų santykį su kitomis ir išaiškinti jų išvedimo galimybes.

Kaip matome, mokant matematikos mokykloje neišvengiamas intuityviųjų ir loginių elementų susiejimas ir apie jokį griežtai aksiominį kursą negali būti nė kalbos, o galimi tik atskiri jo fragmentai.

12. AKSIOMINIS METODAS KAIP MOKYMOSI OBJEKTAS

Kadangi aksiominis metodas plačiai taikomas matematikoje, tai pageidautina su juo tam tikroje mokymo pakopoje supažindinti moksleivius. Šis supažindinimas yra tikslingas dar ir todėl, kad jis palankiai veikia matematinio mąstymo vystymą, padeda suprasti matematinių teorijų abstraktumo esmę ir reikšmę, užtikrinančias galimybę šias teorijas pritaikyti praktikoje.

Kyla klausimai, kokiame mokymo etape, kokia konkrečia medžiaga remiantis, kokiu lygiu ir aspektais galimas toks supažindinimas. Atsakysime į šiuos klausimus.

Pirmiausia pabrėžtina, kad supažindinimas su aksiominiu metodu reikalauja tokių matematinių ir loginių žinių bei įgūdžių, kuriuos mokiniai gali turėti, kai jie turi ne mažiau kaip 14–15 metų. Aišku, mokinius tam reikia rengti iš anksto: supažindinti su įvairiomis konkrečių temų struktūromis, dedukcijos pavyzdžiais ir kai kuriomis išvedimo taisyklėmis. Antra, supažindinti su aksiominiu metodu galima tik remiantis pakankamais pavyzdžiais ir atsižvelgiant į šias sąlygas: a) yra daug paprastų, patrauklių savo vaizdumu, modelių, iliustruojančių abstrakčią teoriją; b) abstrakčios teorijos rezultatai induktyviai „sufleruojami" mokantis iliustruojančių modelių; c) esant mažam aksiomų skaičiui pasiseka sukurti teorijos fragmentą su įdomiomis teoremomis; d) įrodymai yra pakankamai paprasti ir apžvelgiami.

Įdomu, kad būtent geometrija nelabai tinka šiems tikslams, nors tradiciškai būtent su ja ir siejamas aksiominis metodas. Jos pagrindas – gremėzdiška aksiomatika, nėra galimybių pateikti įdomių konkrečių modelių pavyzdžių. Čia tiktų tik „priklausymo geometrija" ir Dž. Bulio algebra.

Taigi mokykloje aksiomų vaidmuo nėra labai didelis, tik geometrijos kurse įvedama aksiomų sistema ir tai toli gražu nepilna. Todėl kiekvienas mokykloje atliekamas įrodymas nėra griežtai loginis – jis yra savos rūšies loginių samprotavimų, vaizdinių, patirties ir intuicijos junginys. Supažindinant su aksiomomis, remiamasi konkrečiais faktais, vaizdinėmis priemonėmis, gyvenimo praktika. Tokiu keliu einama ir dabartiniuose lietuviškuose vadovėliuose.

13. ANALIZĖ IR SINTEZĖ ĮRODANT TEOREMAS

Bendruoju atveju analizė yra tyrimo metodas, kurio pagrindą sudaro kiekybinis objekto savybių nagrinėjimas, besiremiantis skaičiaus ir mato sąvoka, o sintezė – kokybinis nagrinėjimas. Psichologine prasme analizė ir sintezė – vienos iš svarbiausių mąstymo charakteristikų. Rusų psichologas Sergejus Rubinšteinas (1889–1960) teigė, kad „Mąstymo procesas – tai visų pirma *analizavimas* ir *sintetinimas* to, kas išskiriama analize; tik po to seka *abstrakcija* ir *apibendrinimas*, kaip pirmųjų išvestinės" [139, p. 28]. Psichologijoje skiriamos dvi analizės rūšys: a) *filtruojančioji analizė*; b) *analizė per sintezę.*

Filtruojančiosios analizės atveju žmogus, sprendžiantis iškilusią problemą, veikia be jokios sistemos, spėjimo būdu chaotiškai ieško sprendimo, bando taikyti įvairiausius sprendimo būdus ir atsijoja nepasiteisinusius. Tokia analizė ypač taikoma sprendžiant galvosūkius, kur iš tiesų dažnai padeda *insaitas* (angl. „*insight*" – įžvalga; tai staigus sprendimo suvokimas, netikėtas kokio nors nagrinėjamo dalyko arba reiškinio esmės atskleidimas, kilęs impulsyviai mąstant) [113, p. 148]). Pvz., duodamos užduotys: 1) Iš 6 degtukų sudėti 4 lygiašonius trikampius; 2) Tvenkinio paviršius vasarą palaipsniui apauga maurais. Paviršiaus plotas, užaugęs maurais, kiekvieną dieną padidėja 2 kartus. Visas tvenkinys apauga maurais per 100 dienų. Per kiek dienų apaugs maurais pusė tvenkinio paviršiaus? Pirmuoju atveju po ilgoko skaičiaus bandymų susigaudoma, kad plokštumoje tai neįmanoma, o erdvėje – paprasta. Antruoju atveju pradžioje dažnai pateikiamas atsakymas – „per 50 dienų". Tačiau gilesnė sąlygos analizė padeda rasti teisingą atsakymą – „per 99 dienas".

Analizė per sintezę – visos ir bet kurios mąstymo veiklos esminė dalis. S. Rubinšteinas rašė: „Kalbant trumpai ir todėl apskritai, bendrais bruožais, tai *pagrindinė* analizės *forma*, pagrindinis mąstymo proceso nervas yra: *objektas mokymo procese įtraukiamas į vis naujus ryšius ir todėl pasirodo visomis naujomis kokybėmis, kurios fiksuojamos naujomis sąvokomis; iš objekto tokiu būdu lyg ištraukiamas vis naujas turinys; jis lyg pasisuka kiekvieną kartą kita savo puse, atsiskleidžia vis naujos jo savybės*" [139, p. 98–99]. Analizė per sintezę – tai nagrinėjamų objektų naujų pusių, kokybių ir savybių pažinimas įtraukiant šiuos objektus į sistemą ryšių ir santykių, kuriuose šios naujos savybės gali būti atrandamos. Kartais šis objekto įtraukimas į netikėtą ryšių sistemą yra pakankamai stebėtinas ar net juokingas. Tai gyvenime išreiškiama juokų, paradoksų, paralogizmų forma.

S. Rubinšteinas sintezę apibrėžia taip: „Sintezė – tai bet koks priskyrimas, palyginimas, bet koks ryšio tarp skirtingų elementų nustatymas" [139, p. 35]. Mąstymo procese sintezė nuolat pereina į analizę ir atvirkščiai, t. y. pažinime nėra dviejų izoliuotų kelių. Jų vienovė pasireiškia lyginimu. Lyginimą galima apibūdinti kaip analizę, kuri vyksta per sintezę ir veda į apibendrinimą, naują sintezę. Pvz., įrodinėjant dviejų trikampių lygumą (sintezė), pradžioje išskiriami jų kampai, kraštinės (analizė), nustatomas jų lygumas (sintezė), gautų išvadų pagrindu daroma išvada apie trikampių lygumą – nauja sintezė. Taigi lyginimas prasideda sintezės aktu, t. y. atliekama lyginamųjų objektų analizė – išskyrimas to, kas bendra ir atskira; tai kas bendra – jungia (sintetina) apibendrinamuosius reiškinius. Lyginimas – tai ta konkreti sintezės ir analizės forma, per kurią realizuojamas reiškinių empirinis apibendrinimas bei klasifikacija. Lyginimo reikšmė ypač didelė empiriniame pažinimo etape, jo pradinėse pakopose.

14. ELEMENTARIOJI ANALIZĖ IR SINTEZĖ

Analizė ir sintezė turi didžiulę reikšmę moksliniame pažinime. Žmonija savo veikloje nuolat skaido objektus į dalis – atlieka *materialiąją analizę*, sudaro objektus iš atskirų dalių, taip atlikdama *materialiąją sintezę*. Šie metodai ir vadinami *elementariąja analize ir sinteze*. Jie turėjo ir tebeturi didelę reikšmę matematikos raidai bei jos dėstymui. Formuojant sąvokas, kai remiamės konkrečiomis situacijomis ir vėliau abstrahuojamės nuo jų, mintyse išskiriame esminius sąvokų požymius – atliekame *elementariąją analizę*, o vėliau sujungiant tuos požymius ir taip suformuojant sąvokos turinį atliekama *elementarioji sintezė*. Antai pvz., skaičiaus ar algebrinio reiškinio skaidymas dauginamaisiais – elementarioji analizė, o tai, kad dauginamieji sujungiami daugybos ženklais ir prilyginami išskaidytajam skaičiui ar reiškiniui – elementarioji sintezė. Tad šie abu procesai tarpusavyje glaudžiai susiję. Elementarioji analizė ir sintezė pritaikomos ir kai kurių teoremų įrodymuose, pvz., įrodant veiksmų su laipsniais teoremas.

15. SINTETINIS METODAS ĮRODANT TEOREMAS

Teoremas įrodyti galima dviem būdais. Vienas jų – pradedant teoremos sąlyga ir naudojantis jau žinomais teisingais argumentais (aksiomomis, anksčiau įrodytomis teoremomis, jų išvadomis) gauname išvadą, kaip logiškai išplaukiančią iš teoremos sąlygos. Tai sintetinis įrodymo metodas.

Sintetinis metodas pateikia tik gatavą įrodymą. Vien tik juo naudojantis teoremų įrodymų atrasti negalima. Įrodinėjančiojo arsenale nėra kriterijų, pagal kuriuos būtų galima pasirinkti reikalingus argumentus. Loginiu požiūriu šis metodas yra pažangus ir yra viena iš sudedamųjų dedukcinio samprotavimo dalių.

16. SINTETINIS MATEMATIKOS MOKYMO METODAS

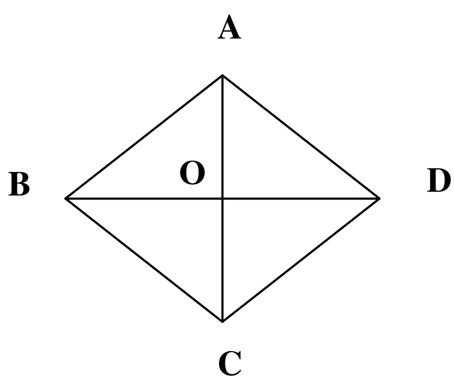
Mokykliniam geometrijos kursui būdinga sintetinė sistema. Taikoma ji ir kituose mokykliniuose kursuose. Todėl reikia išmokyti mokinius naudotis sintetiniu metodu, padėti suvokti jo esmę ir savybes.

Teigiamos šio metodo savybės: pilnumas, glaustumas, trumpumas. Todėl tai labai patogu dėstant matematinę teoriją vadovėliuose. Neigiamos savybės: pradedantiesiems mokytis šio metodo taikymas atrodo esąs dirbtinis, nes ne visada aiškiai motyvuojami brėžinio papildymai, negalima duoti iš anksto pagrįsto įrodymo plano; vien šio metodo taikymas suponuoja vien paskaitinio mokymo metodikos taikymą, o taip dažnai žlugdoma mokinių iniciatyva, aktyvumas, nes mokiniams čia keliami tik reikalavimai įdėmiai klausytis ir stebėti, suprasti mokytojo aiškinimą, fiksuoti teoremos įrodymą, vėliau jį pakartoti. Todėl, ypač žemesnėse klasėse, sintetinį metodą reikia kuo glaudžiau sieti su analitiniu. Vyresniosiose klasėse šis metodas gali būti pritaikytas plačiau, tačiau vien juo irgi nereikia tenkintis. Antai dažnai prieš įrodant teoremą naudinga iš anksto pateikti mokiniams įrodymo planą, o tai – jau analitinis metodas.

17. KYLANČIOJI ANALIZĖ

Ji pradedama nuo teoremos išvados, kuri tampa pradiniu tašku, nuo kurio prasideda samprotavimas. Brėžinio papildymai čia yra daugiau motyvuoti ir neatrodo esantys dirbtiniai. Logikoje šis metodas vadinamas *regresyviu* (lot. „*regressus*“ – ėjimas atgal): mąstymas eina nuo to, ką reikia įrodyti, prie pagrindų. Šis metodas susietas su sinteze, todėl ir jis yra dedukcinių samprotavimų dalis.

Pvz., reikia įrodyti, kad rombo įstrižainės yra tarpusavyje statmenos (26 pav.).



26 pav.

1) Kad įrodytume, jog $AC \perp BD$, pakanka įrodyti, kad $BO \perp AC$.

2) Kad įrodytume, jog $BO \perp AC$, pakanka įrodyti, kad BO yra Δ ABC aukštinė.

3) Kad BO būtų Δ ABC aukštinė, pakanka įrodyti, kad Δ ABC yra lygiašonis, o BO – jo pusiaukraštinė.

4) Kad Δ ABC būtų lygiašonis, turi būti $AB = BC$.

5) Bet $AB = BC$ pagal teoremos sąlygą, ir BO – Δ ABC pusiaukraštinė, nes $AO = OC$ (lygiagretainio įstrižainių savybė).

Tokia kylančioji analizė: a) užtikrina sąmoningą ir savarankišką mokinių darbą, ieškant teoremos įrodymo; b) padeda vystytis mokinių loginiam mąstymui; c) užtikrina veiksmų įsisąmoninimą, tikslingumą kiekviename įrodymo etape; d) įrodymo schema paprasta, vis klausiama: „Ką reikia įrodyti? Ką pakanka įrodyti?“ ir pan. Kai kurie autoriai kylančiąją analizę vadina *tobuląja* [46].

18. KYLANČIOJI ANALIZĖ MOKANT

Šis metodas leidžia mokiniams rasti teoremos įrodymą. Todėl jis vysto kūrybinį mokinių mąstymą. Būtent dėl to reikia siekti, kad kiekvienas mokinys ne tik įvaldytų šį metodą, bet ir giliai suvoktų jo esmę. Tam reikia daug laiko ir pastangų. Žemesnėse klasėse kylančioji analizė naudojama įrodant teoremas žodžiu, sudarant įrodymo planą. Jį sudarius, imamasi sintetinio metodo ir įrodymas užrašomas. Pvz., taip rekomenduojama įrodyti daugelį teoremų iš temos „Keturkampiai“.

Vyresniosiose klasėse ši analizė naudojama plačiau, ypač stereometrijoje, algebroje (įrodinėjant daugelį nelygybių). Šis loginis metodas glaudžiai siejasi su pedagoginiu metodu – euristiniu pokalbiu.

19. BESILEIDŽIANČIOJI ANALIZĖ

Ji taikoma tais atvejais, kai reikia paneigti tokius teiginius, kurie klaidingai yra priimami kaip teisingi. Kartais tada randamas įrodymo planas. Pirmuoju atveju besileidžiančioji analizė yra taikoma kaip Sokrato metodas. Kai kurie autoriai šią analizę vadina *netobuląja* [46].

Pvz., besileidžiančiosios analizės metodu galima įrodyti teiginį: „Jei a ir b – neneigiami realieji skaičiai, tai $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$“. Sudaroma išvadų grandinė:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \to a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \to (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Paskutinė nelygybė yra visada teisinga. Kadangi gretimi teiginiai, kai $a \geq 0$ ir $b \geq 0$ taip pat teisingi, tai sudarytąją grandinę galima apgręžti:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \to a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \to a+b \geq 2\sqrt{ab} \to \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Teiginys įrodytas.

Jei išvadų grandinės, sudarytos besileidžiančiosios analizės metodu apgręžti neįmanoma, tai teorema dar lieka neįrodyta. Tokiu atveju reikia arba sudaryti kitą išvadų grandinę tuo pačiu metodu, arba mėginti taikyti kitus įrodymo metodus.

Pamokose kuo dažniau reikia taikyti besileidžiančiąją analizę klaidingiems teiginiams sugriauti. „Užuot tiesiog atmetęs mokinių klaidingus teiginius, – rašė Vytautas Drėgūnas ir Petras Rumšas (1921–1987), – mokytojas turi sugebėti iš kiekvieno jų greitai išvesti aiškiai klaidingą išvadą. To paties turi mokytis ir mokiniai, kad įgustų naudotis šia labai svarbia savikontrolės priemone“ [46, p. 73–74]. Pvz., mokiniui parašius $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, mokytojas gali pasakyti: „Jei tamsta tvirtini, kad ši lygybė teisinga, tai iš jos išplaukia $a^2 + b^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ir $2ab = 0$. Vadinasi, $a = 0$ arba $b = 0$, t. y. a ir b – ne bet kurie skaičiai. Paėmus, pvz., $a = 3$, $b = 4$, kairioji tamstos parašytos lygybės pusė bus lygi 5, o dešinioji – 7“.

20. ĮRODYMAS PRIEŠTAROS METODU

Čia taikomi du logikos dėsniai: prieštaravimo ir negalimo trečiojo. Pirmasis, taikant jį matematikoje, skambėtų taip: „*Negalima, kad esant vienoms ir toms pačioms sąlygoms matematinis objektas būtų ir nebūtų kaip nors susietas su kitu objektu*“, pvz., negalima, kad esant vienoms ir toms pačioms sąlygoms atkarpos $AB = CD$ ir $AB \neq CD$. Antrasis dėsnis skambėtų taip: „*Kiekvienas matematinis objektas kito objekto atžvilgiu yra arba teigiamame santykyje su juo, arba neigiamame santykyje, kokio nors trečio santykio tarp jų negali būti*“.

21. PRIEŠTAROS METODAS MOKYMO PROCESE

Kad mokiniai suvoktų šio metodo esmę ir prieštaravimo bei negalimo trečiojo dėsnius, naudinga duoti seriją pratimų:

1) Duotos dvi atkarpos a ir b (jų nenubrėžiame). Kokie santykiai galimi tarp jų?

2) Atkarpos $c \geq d$. Kokie galimi šių atkarpų ilgių santykiai?

3) Atkarpos $a \neq b$. Kokias išvadas galima padaryti apie šių atkarpų ilgius?

4) $\angle A \geq \angle B$. Kokias išvadas galima padaryti apie šių kampų didumus?

5) $\angle C \neq \angle D$, $\angle C \geq \angle D$. Kokie santykiai galimi tarp kampų C ir D?

6) AB ir CD – dvi tiesės, priklausančios vienai plokštumai. Kokie galimi šių tiesių tarpusavio padėties atvejai?

7) AB ir CD – dvi tiesės, priklausančios vienai plokštumai, jos nėra lygiagretės. Kokia šių tiesių tarpusavio padėtis?

Pirmą kartą prieštaros metodas paprastai taikomas įrodant teoremą: „Trikampyje prieš lygius kampus yra lygios kraštinės“. Įrodžius šią teoremą, mokiniams reikia paaiškinti, kad buvo naudojamas naujas įrodymo būdas – prieštara ir apžvelgti planą, kuris buvo taikomas. Šis planas užrašomas lentoje, o mokiniai jį užsirašo sąsiuviniuose:

1) Tarkime, kad teoremos išvada klaidinga. Tada bus teisingas prieštaraujantis šiai išvadai teiginys.
2) Apžvelgiame galimus atvejus.
3) Įsitikiname, kad kiekvienu atveju gausime išvadą, kuri prieštarauja arba teoremos sąlygai, arba anksčiau nagrinėtiems teisingiems teiginiams.
4) Prieštaravimų buvimas verčia atsisakyti priimtos išvados.
5) Pripažįstame teisinga duotosios teoremos išvadą.

Šis planas taikomas įrodant tokią teoremą: „Trikampyje prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė“. Kartu mokiniams primenama, kad taip buvo įrodytos teoremos apie tiesių lygiagretumo požymį ir apie atitinkamųjų kampų prie dviejų lygiagrečių tiesių bei jų kirstinės savybę.

22. ANALIZĖS IR SINTEZĖS PALYGINIMAS. JŲ SINTEZĖ

Analizė ir sintezė naudojama įrodinėjant teoremas. Pvz., įrodant besileidžiančiosios analizės metodu nelygybę (žr. 18 sk.) pirmasis pateiktasis įrodymas yra analitinis, antrasis – sintetinis. Analitinio įrodymo esmė yra ta, kad pradedama nuo teiginio, kurį reikia įrodyti, ir šį teiginį logiškai pagrįstais žingsniais pakeičiame teiginiu, kurio teisingumas žinomas. Sintetiniame įrodyme ieškoma žinomo teisingo teiginio, kurį logiškai pagrįstais žingsniais perdirbame į teiginį, kurį reikia įrodyti. Šiam įrodymui būdinga tai, kad čia aiškinama, kas ir kaip daroma, bet nepaaiškinama, kodėl pradinis reiškinys pasirenkamas būtent toks ir taip. Todėl ir įrodymas kartais atrodo esąs dirbtinis, sugalvotas. O ir pradinį teiginį rasti ne visada lengva. Analitinis įrodymas – natūralesnis, čia žinoma, nuo ko reikia pradėti. Tačiau jame lengviau yra suklysti. Pvz., galima „įrodyti“, kad 2 = 3:

$$-6 = -6,$$
$$2 \times (-3) = 3 \times (-2),$$
$$2 \times (2 - 5) = 3 \times (3 - 5),$$
$$4 - 10 = 9 - 15,$$
$$4 - 10 + {}^{25}\!/_4 = 9 - 15 + {}^{25}\!/_4$$
$$\sqrt{(2 - {}^{5}\!/_2)^2} = \sqrt{(3 - {}^{5}\!/_2)^2},$$
$$2 - {}^{5}\!/_2 = 3 - {}^{5}\!/_2,$$
$$2 = 3.$$

Aišku, kad pastaroji išvada neteisinga.

Todėl praktikoje ir yra tikslu sieti abu įrodymo būdus. Paprastai analitiniu būdu surandamas tas teiginys, kurį laikysime pradiniu, o sintetiniu – atliekamas pats įrodymas.

Mokymo procese vienas ar kitas objektas susiejamas naujais ryšiais ir santykiais su kitais objektais ir todėl mokiniams pasirodo savo nauja kokybe, lyg tai „pasisuka“ į juos kita, nauja puse.

Kadangi analizė ir sintezė taikomos bendrai, mokytojui svarbu mokėti ten, kur reikia, labiau panaudoti ar vieną, ar kitą būdą. Būtina mokiniams nuolat pabrėžti, kad analizė – kelias į atradimą, sintezė – kelias į pagrindimą, įrodymą.

23. APIBENDRINIMAS IR ABSTRAKCIJA MOKANT ĮRODYMO

Apibendrinimo metu mintyse išryškinama kokia nors savybė, priklausanti kuriai nors objektų aibei ir siejanti šiuos objektus.

Pvz., nagrinėjant aritmetinės progresijos narius, matome, kad:

$a_2 = a_1 + d$,

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$,

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 3d$ ir t. t.

Apibendrinus gaunama:

$a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Toliau ši formulė naujai apibendrinama ir nustatoma, kad bet kuri aritmetinė progresija yra natūraliojo argumento tiesinė funkcija:

$y = kx + b \ (x \in N)$.

Taigi apibendrinimo procese nuo siauresnės apimties pereiname prie platesnės apimties.

Su apibendrinimu glaudžiai siejasi *specializacija* (pranc. „*spécialisation*“) – mintinis kurios nors savybės išskyrimas iš nagrinėjamojo objekto savybių aibės. Taip iš rombų aibės išskiriami kvadratai – rombai su stačiais kampais (arba lygiomis įstrižainėmis). Taigi specializacijos procese vyksta aibės siaurinimo veiksmas – nuo platesnės apimties aibės pereinama prie siauresnės apimties aibės, subordinuotos pirmajai.

Pažintinės veiklos procese žmogus atspindi realios tikrovės objektus ir reiškinius arba jutiminiu būdu, arba sąvokomis – jų „apytikslėmis nuotraukomis“. Sąvokos žmonių sąmonėje susiformuoja abstrahuojantis nuo objekto neesminių savybių ir apibendrinant. Psichologai laiko, kad abstrakcija – tai iš esmės specifinė analizės forma, kurią analizė įgyja pereinant prie abstraktaus mąstymo sąvokomis. Abstrakcija yra dviejų rūšių: 1) kai jutiminio suvokimo metu mes abstrahuojamės nuo vienų objekto savybių ir išskiriame kitas jo savybes, pvz., kokį nors daiktą mes nagrinėjame tik kaip geometrinį kūną, kreipdami dėmesį tik į jo formą, matmenis, padėtį plokštumoje ar erdvėje; 2) atsiribojame nuo jutiminio pažinimo apskritai, ne vien paprastai atrenkame vienas ar kitas objekto ar reiškinio savybes, bet ir keičiame jas, pvz., klasifikuojant trikampius pagal jų kampų didumą nebesidomima jų kraštinių ilgiais. Taigi abstrahavimas – mintinis atsiribojimas nuo tam tikrų duotuoju momentu nesvarbių, neesminių nagrinėjamo objekto savybių ir esminių duotajame tyrime savybių išskyrimas.

Fizikoje, tirdami judėjimą, išreikštą lygtimi $v_t = v_0 + at$, metalinio strypelio ilgio kitimą, išreikštą lygtimi $l_x = l_0 + \alpha t$, ekonomikoje, tirdami savikainos kitimą, išreikštą lygtimi $m_n = m_0 + an$, abstrahuojamės nuo konkrečių dydžių ir gauname funkciją $f(x) = ax + b$. Tirdami jos grafiką ir savybes, galime jomis pasinaudoti tirdami aukščiau minėtus fizikinius ar ekonominius dydžius.

Konkretizacija – priešingas abstrahavimui veiksmas. Tai tokia mąstymo veikla, kurioje fiksuojama vieno ar kito nagrinėjamo objekto savybė neatsižvelgiant į kitas jo savybes. Ji taikoma ir kaip vaizdinė iliustracija, ir kaip teiginio taikymas konkrečiomis sąlygomis. Pvz., $ab = ba$, $5 \times 2 = 2 \times 5$; $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(2 + 7) + 3 = 2 + (7 + 3)$.

24. TOBULOSIOS INDUKCIJOS METODAS

Juo naudojamės tada, kai iškyla būtinybė duoti loginį pagrindimą išvadai, gautai indukciniu keliu. Moksliniame tyrime šis metodas susideda iš trijų nuoseklių etapų: 1) stebėjimas ir patyrimas; 2) hipotezė; 3) jos įrodymas.

Reikia būtinai pabrėžti mokiniams, kad yra teoremų, kurias įrodant prireikia išnagrinėti kelis atskirus atvejus. Antai planimetrijoje pirmą kartą su panašia situacija susiduriama įrodinėjant teoremas apie kampus su atitinkamai lygiagrečiomis ar statmenomis kraštinėmis. Būtina atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad teorema laikoma įrodyta, jei išnagrinėti visi galimi atvejai, į kuriuos suskaidoma teorema. Algebroje su tobuląja indukcija susiduriama įvedant neigiamuosius ir trupmeninius laipsnio rodiklius.

25. MATEMATINĖ INDUKCIJA MOKYKLOJE

L. Oilerio klydimai ieškant pirminio skaičiaus formulių: $y = x^2 + x + 41$ (y pirminis tik iki $x = 39$); $y = 2x^2 + 29$ (y pirminis tik iki $x = 28$) yra klasikiniai nepilnosios indukcijos taikymo ir skuboto apibendrinimo pavyzdžiai. Matematinės indukcijos metodas, kuris perfrazuoja vieną iš formaliosios natūraliųjų skaičių teorijos aksiomų, tokių klaidų leidžia išvengti. Mokiniams patogu pirmiausia pateikti tokį pavyzdį: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = n^2$ (n pirmųjų nelyginių skaičių suma). Turime:

$n = 1$; $1 = 1^2$ (teisinga);

$n = k$; $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$ (daroma prielaida, kad teisinga);

$n = k + 1$; $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Įrodyta.

Dar pateikiame pavyzdžius eilučių sumų, kurias galima apskaičiuoti formulėmis, įrodomomis matematinės indukcijos metodu:

$3 + 6 + 9 + ... + 3n = 1{,}5(n + 1)$;

$2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2(2^n - 1)$;

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$;

$1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + ... + n(n + 1) = {}^1/_3 n(n + 1)(n + 2)$;

$$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Šiuo metodu įrodomos ir nelygybės:

$2 > n \ \ \forall\, n \in \mathrm{N}$;

$n^2 > 2n + 1 \ \ \forall n \in \mathrm{N},\ n \geq 3$;

$2^n > n^2\ \forall n \in \mathrm{N},\ n \geq 5$;

$(1 + p)^n \geq 1 + np$, jei $p > -1$ ir $n \in \mathrm{N}$.

26. GENETINIS METODAS MOKANT TEOREMŲ

Mokant kai kurių matematinių dalykų temų, atskirų ypač svarbių teoremų ar taisyklių grupių yra ypač svarbu naudotis *genetiniu metodu*. Jo esmė – mokiniams atskleidžiama, kodėl atsirado atitinkama tema, teoremų ar taisyklių grupė, į kokius praktinius klausimus jos pateikia atsakymus, kokiais keliais jos gautos.

Genetinio metodo taikymas ypač vertingas tada, kai vienos ar kitos teorijos atsiradimas ir vystymasis yra susiję su praktinių problemų sprendimu, gamybos, technikos tobulinimo poreikiais. Tada genetinis metodas leidžia mokiniams įsisąmoninti, kodėl būtina mokytis naujos medžiagos. Taikant šį metodą yra tikslinga: a) pamokoje pateikti trumpų, įdomių istorinių žinių, atskleidžiančių matematinių teorijų atsiradimo priežastis; b) kai kurių temų mokymosi pradžioje, kur tai įmanoma, bendrais bruožais atskleisti jų turinį ir tokiu būdu suformuoti jų nagrinėjimo planą; c) dėstyme naudotis probleminiais metodais, sudarant sąlygas mokiniams patiems atrasti pagrindines teoremas ar taisykles.

Antai prieš pradedant nagrinėti sisteminį geometrijos kursą, būtina prisiminti senovės istoriją ir parodyti, kokie praktiniai žmonių poreikiai lėmė geometrijos atsiradimą, atskleisti geometrijos svarbą žmonių gyvenime, jų gamybinėje veikloje. Išmokus veiksmų su kuria nors skaičių aibe, galima planuoti mokytis veiksmų su jos plėtiniu. Pradedant mokytis trikampių lygumo požymių parodoma, kad jų lygumo apibrėžimas ne visada praktiškai pritaikomas (sutapdinant trikampius visais elementais), todėl ir būtina ieškoti kitų būdų, kurie išreiškiami atitinkamais požymiais.

27. KLAIDOS, KURIAS MOKINIAI DARO MOKYDAMIESI TEOREMŲ

Gana dažnai pasitaiko tokia situacija, kai žemesnėse klasėse mokiniai išmoksta teoremų įrodymus mintinai, atpasakoja juos kaip prozos gabalus mokant literatūros. Norint to išvengti, reikia pratinti mokinius įrodinėti teoremas su kitaip orientuotais, kitokia raidine simbolika pažymėtais brėžiniais. Dažnai žemesniųjų klasių mokiniai remiasi brėžinyje esančiomis atsitiktinėmis figūros savybėmis. Tada būtini priešpriešiniai pavyzdžiai su figūromis, kuriose tų atsitiktinių savybių nebūna. Būtina mokinius supažindinti su aukščiau minėtomis ir kitokiomis optinėmis iliuzijomis. Sistemingi mokytojo reikalavimai pagrįsti teiginius yra viena iš priemonių, padedančių mokiniams susiformuoti teisingus vaizdinius apie probleminį vieno ar kito sprendinio pobūdį.

Vieno ar kito mokymosi metodo ar būdo taikymas teoremoms mokytis labai priklauso nuo teoremos turinio ir reikšmės bendroje žinių sistemoje, taip pat ir nuo mokinių individualių galimybių. Suprantama, kad nagrinėdami teoremas ir jų įrodymus mokiniai neretai daro ir kitų įvairių klaidų, kurių kilmę mokytojas turi būtinai žinoti. Daugumą mokinių klaidų galima suskirstyti į du tipus.

1. Netvirtas pagrindinių geometrijos teoremų išmanymas dažnai lemia tokias klaidas: apskritimo, apibrėžto aplink lygiašonį trikampį, spindulys apskaičiuojamas pagal formulę, išvestą lygiakraščiam trikampiui; trapecijos plotas skaičiuojamas pagal stačiakampio ploto formulę, ir t.t., t. y. čia „koją pakiša“ neteisingas analogijos taikymas. To paties tipo klaidoms priklauso ir mokinių formuluojami klaidingi teiginiai: apskritimo, apibrėžto apie trikampį, centras yra jo pusiaukraštinių susikirtimo taškas; lygiašonio trikampio pagrindo kampo pusiaukampinė yra kartu ir pusiaukraštinė, ir t. t.

2. Didelis klaidų skaičius yra susijęs su matematinių teiginių ir samprotavimų mokymusi, nesuprantant dedukcinės matematikos kurso sandaros, t. y. daromos grynai loginės klaidos: a) netikslus sąvokų, įeinančių į vieną ar kitą teiginį, traktavimas; b) samprotavimų struktūros nesupratimas; c) įrodymų bendrumo nesupratimas; d) nemokėjimas teisingai nubraižyti brėžinį, tiksliai suformuluoti teoremą ar jos įrodymą. Pvz.: „Jei keturkampio vienas (ar du) kampas (-ai) yra status (-ūs), tai jis – stačiakampis“, „Trikampio

vidaus kampų didumų suma lygi 180°, nes šis trikampis – lygiašonis“, ir t. t.

28. TEOREMŲ KARTOJIMAS

Teoremų išmokimo kokybė pirmiausia priklauso nuo jų išdėstymo pamokoje. Pageidautina, kad teoriniai mokyklinio matematikos kurso klausimai iš esmės būtų mokinių išsiaiškinami per pamoką. Tačiau norint pasiekti, kad mokiniai tvirtai įsisavintų kursą, reikalingas daugkartinis medžiagos kartojimas. Tai gali būti einamasis, teminis, visų mokslo metų ar viso mokomojo kurso kartojimas. Kartojimas visada turi įnešti ką nors nauja, atskleisti naujus sąryšius, apibendrinimus.

Pradinė kartojimo stadija – įtvirtinimas toje pačioje pamokoje, kurioje teorema išdėstyta. Čia paprastai panaudojamas lentoje esantis brėžinys, užrašai. Daugiau laiko reikalaujantis kartojimas yra tada, kai pakeičiami kai kurie neesminiai veiksniai: brėžinių forma, raidiniai žymėjimai. Tai padeda geriau įsisąmoninti įrodymo esmę, kartu liudija apie mokinių daromą pažangą.

*

*   *

Šiais klausimais rašė jau rusų pedagogikos klasikas K. Ušinskis: „Matematiniai įrodymai reikalingi tik tada, kai vaizdiniai, sudarantieji matematinę mintį, taip susikomplikuoja ir pagausėja, kad žmogui pasidaro sunku, nesinaudojant matematiniais ženklais, atsiminti visus tuos vaizdinius, aiškiai ir tiksliai juos vienu metu įsisąmoninti ir to dėka aiškiai įsisąmoninti jų ryšį ir teisingai juos kombinuoti į vieną išvadą. Viso matematinių įrodinėjimų proceso esmė yra ta, kad pats sudėtingiausias išprotavimas būtų privestas prie paprastos aksiomos, t. y. iki tokio teiginio, kurio teisingumas kiekvienam vienodai akivaizdus ir *kurio ne tiktai nereikia įrodyti, bet ir negalima įrodyti*“ [109, p. 484].

VII. LOGINĖS MATEMATINĖS TEORIJOS TAIKYMAS MOKANT UŽDAVINIŲ SPRENDIMO

1. TEORIJOS TAIKYMŲ RŪŠYS

Kiekviena teorija svarbi savo taikymais. Jei teorija neturi pritaikymo, tai kam ją kurti ir jos mokytis? Tradiciškai teorijos taikymas suprantamas kaip jos taikymas uždaviniams spręsti. Tačiau ne mažiau svarbu yra tai, kaip viena teorija taikoma kitoje (algebra – geometrijoje, geometrija – analizėje, matematika – fizikoje ir t. t.). Ir šios rūšies taikymai susiję su praktika, tegu ir per kitą teoriją, tarpiškai. Taip realizuojama tarpdalykinė integracija. Dabar matematika plačiai taikoma ne tik gamtos moksluose, bet ir ekonomikoje, socialiniuose bei humanitariniuose moksluose.

Bet koks teorijos taikymas susijęs su modelio (lot. „*modus*“, it. „*modello*“ – matematinių ryšių sistema, tapačiai imituojanti tyrinėjamo objekto struktūrą) sukūrimu. Tais atvejais, kai teorija taikoma sprendžiant uždavinius, šio uždavinio modelis kuriamas remiantis teorijos sąvokomis: pvz., iš uždavinio sąlygos sudaroma lygtis arba jų sistema – abstraktus konkretaus uždavinio modelis. Antra vertus, uždavinys – konkretus abstrakčios sistemos (lygties, lygčių sistemos) modelis, t. y. santykis „būti modeliu“ – simetriškas. Tais atvejais, kai viena teorija pritaikoma kitoje, kuriamas pirmosios teorijos modelis kitos teorijos objektuose.

Tokį modelio terminą pritaikyti neįprasta mokykloje, kur modeliu įprastai laikoma kokia nors vaizdinė priemonė. Toks modelio supratimas irgi priimtinas, nes abstrakčios sąvokos: „kubas“, „prizmė“ ir kt. čia realizuojamos kaip konkretūs objektai, o nuo jų vėl grįžtama į abstrakčius modelius.

Mokykliniame kurse mes „konstruojame modelius“ ir abstrakčiai, kuriame loginius-matematinius modelius panaudodami objektus ir santykius, figūruojančius sprendžiamuose uždaviniuose.

Šiais atvejais modeliai yra labiau abstraktūs, negu uždaviniai, kuriuos jie modeliuoja, tačiau tie modeliai yra vaizdesni negu uždaviniai. Išvaduotas nuo neesminių dalykų šis abstraktus modelis apnuogina ryšių struktūrą konkrečių objektų sistemoje, leidžia išspręsti uždavinį panaudojant formalų matematinės teorijos aparatą. Todėl šis modelis ir yra vaizdesnis, lengviau apžvelgiamas. Taigi nors šiuolaikinis modelio supratimas yra susijęs su vaizdumu, bet pati vaizdumo sąvoka čia išplečiama.

2. MATEMATIKOS IR FIZIKOS INTEGRACIJA MOKYKLOJE

Fizika visada buvo, yra ir bus viena iš svarbiausių matematikos vartotojų. Fizikos uždaviniai buvo, yra ir bus tolesnio matematikos mokymosi stimulas. Įvairios matematikos sąvokos ir teorijos kyla remdamosi fizikiniais modeliais ir vystomos pirmiausia tam, kad tenkintų fizikos poreikius. Tad ir mokant matematikos ryšys su fizika turi būti realizuojamas pirmiausia tam, kad tenkintų fizikos poreikius. Tad ir mokant matematikos ryšys su fizika turi būti realizuojamas ne tik taikant fizikoje matematines žinias, bet ir jų įgyjant.

Tikslinga būtų tokia schema: nuo konkrečių situacijų fizikoje eiti prie abstrakčių matematinių sąvokų, kurios padeda formuoti matematinį aparatą, naudojamą spręsti uždaviniams, susijusiems su pradinėmis ir kitomis fizikinėmis situacijomis, taip pat uždaviniams, iškylantiems ir kitose srityse.

Realizuojant šią schemą išryškinama ir abstraktaus pobūdžio matematinės teorijos reikšmė. Šios teorijos aparatas taikomas įvairiose konkrečiose situacijose, susietose struktūros bendrumu. Labiausiai matematikos ir fizikos ryšys pasireiškia formuojant funkcijos sąvoką. Fizika matematikai pateikia nemažai funkcijų rūšių. Abstrahuojantis nuo konkrečių fizikinių modelių, funkcijos tiriamos kaip abstraktūs matematiniai objektai, o po to įgytos žinios taikomos nagrinėjant konkrečius fizikinius procesus. Pvz.:

1) Remiantis judėjimo lygtimis $s = vt$ ir $s = s_0 + vt$, nagrinėjamos funkcijos $y = ax$ ir $y = ax + b$. Po to šios funkcijos gali būti taikomos uždaviniams spręsti taikant aukščiau pateiktas judėjimo lygtis arba taikant dujų tūrio ir slėgio lygtis: $v = v_0(1+ \alpha t)$ ir $p = p_0(1 +\alpha t)$.
2) Judėjimo lygtis $s = v_0 t + at^2/2$ ir laisvojo kritimo lygtis $s = gt^2$ veda prie kvadratinės funkcijos $y = ax^2+ bx + c$ nagrinėjimo, o po to vėl grįžtama į fizikinius modelius.
3) Boilio ir Marioto* dėsnis $p = {}^{k}/_{v}$ arba $pv = k$ pateikia atitinkamos funkcijos, kuri išreiškiama lygtimi $xy = k$ modelį. Ištyrus šios funkcijos savybes, tyrimo rezultatai taikomi nagrinėjant aukščiau minėtą fizikos dėsnį.

3. UŽDAVINIAI

Istoriškai, kaip jau minėjome aukščiau, labiausiai efektyvi matematikos mokymo priemonė yra mokymas per uždavinius. Todėl iškyla problema: reikia sukurti pedagoginiu požiūriu tikslingą uždavinių sistemą, kuri padėtų vesti mokinius per visas matematinės veiklos sritis (probleminių situacijų išryškinimas, jų matematizavimas,

* Robertas Boilis (*Boyle*, 1627–1691) – anglų chemikas, fizikas ir filosofas; Edmas Mariotas (*Mariotte*, 1620–1684) – prancūzų fizikas)

uždavinių, motyvuojančių teorijos išplėtimo būtinumą, sprendimas ir t. t.). Aišku, čia pirmiausia turi pasistengti vadovėlių, uždavinynų ir kt. mokomųjų priemonių autoriai (čia nemažai padirbėjo visų dabar Lietuvos mokyklose vartojamų pradinių [25–28, 56, 57, 77–80] ir vyresniųjų klasių [19, 37–39 ir kt.] matematikos vadovėlių autoriai), bet tai aktualu ir mokytojui. Norint išspręsti šią pedagoginę problemą būtina patikslinti situacijos bei uždavinio sąvokas, atlikti uždavinių struktūrinę analizę. Pastaroji leis įvertinti uždavinių sudėtingumą ir numatyti jų sprendimo mokymosi seką.

Bet kuri probleminė situacija ir uždavinys kyla kokioje nors realioje srityje. Daugumos uždavinių struktūra išreiškiama implikacija $p \to q$, o jų sprendimas – implikacijų seka: $p \to p_1, p_1 \to p_2, ..., p_{n-1} \to p_n, p_n \to q$. Čia turime, kad: 1) pirmosios implikacijos prielaida yra p; 2) paskutinės implikacijos išvada yra q; kiekvienos implikacijos, išskyrus paskutinę, išvada yra kitos implikacijos prielaida. Taigi remiantis implikacijų tranzityvumu, gausime $p \to q$, t. y. iš esmės pradinį uždavinį mes išdėstėme paprastesnių uždavinių seka. Jei kokia nors sekos dalis $p_k \to p_{k+1}, \ldots, p_{k+l-1} \to p_{k+l}$ yra jau anksčiau spręsto uždavinio sprendimas, tai dalį šio uždavinio implikacijų sekos galima pakeisti implikacija $p_k \to p_{k+l}$. Tokiu atveju implikacijų skaičius sekoje sumažės $l - 1$ vienetų.

Struktūrinė uždavinio ir jo sprendimo būdo analizė padeda išaiškinti, kokius uždavinius yra tikslinga spręsti anksčiau, kokius vėliau, kad vėlesnieji taptų mažiau sudėtingais, kas yra labai svarbu mokant.

Būtina skirti uždavinio *sudėtingumą* kaip objektyvią uždavinio savybę, taip pat to uždavinio *sunkumą*, kuris atspindi santykį tarp uždavinio ir to, kuris tą uždavinį sprendžia: tas pats uždavinys vieniems atrodys esąs lengvas, kitiems – sunkus, t. y. uždavinio sunkumas yra grynai *pragmatinis* (gr. „*pragma*“ – darbas, veiksmas), o tai matematikos didaktiką ypač domina, nes negalima sukurti efektyvaus mokymo proceso neišsiaiškinus santykio tarp mokymo turinio ir jo objekto – mokinio. Kad galėtumėme palengvinti mokiniams uždavinių sprendimą, reikia sukurti tokią uždavinių sistemą, kad eitume nuo lengvesnių prie sunkesnių, nuo paprastesnių prie sudėtingesnių uždavinių, t. y. realizuoti mokymo prieinamumo principą, „auksines didaktikos taisykles“.

4. MATEMATINIAI UŽDAVINIAI

Matematikos mokymas siekia matematinį aparatą taikyti spręsti įvairiausiems uždaviniams – tiek iš pačios matematikos, tiek iš kitų sričių, taigi uždavinių sprendimo mokymu suprantame mokymą: 1) išreikšti ne matematikoje iškylančius uždavinius matematine kalba; 2) spręsti pačius matematinius uždavinius.

„Uždavinius <...> reikia duoti vis sudėtingesnius, bet jie niekuomet neturi nustoti savo praktinio, vaizdinio pobūdžio. Vėliau šie uždaviniai gali būti pirmosiomis namų apyvokos ir politinės ekonomijos pamokomis. Pavyzdžiui, tegul vaikas teisingai apskaičiuoja, kiek kainuoja jo durtinėlis, o gelumbės kaina, užmokestis už darbą ir t. t. turi būti duodami ne iš akies, bet kiek galima tikresni, – rašė K. Ušinskis. – Šveicarijos mokyklose man teko matyti, kaip mokytojas gali pasinaudoti aritmetiniais uždaviniais, norėdamas duoti vaikams supratimą apie ekonominę veiklą. Aš girdėjau <...>, kaip vienas šveicarų mokytojas apskaičiavo su klase, kiek kainuoja raguolis, kurį vaikai per pusryčius suvalgė, ir kodėl jis tiek kainuoja <...>: vaikai susipažino ne tiktai su kainomis, įeinančiomis į duonos kainą, bet netgi su santykiais asmenų, dalyvaujančių duonos gamyboje ir nustatančių jos kainą: jie sužinojo, kiek ima malūnininkas ir kodėl jis tiek ima; koks atlyginimas teko duonos pardavėjui ir kodėl ir t. t.“ [109, p. 609]. Tokių pavyzdžių daugybė krinta į akis susipažinus su prieškario ir pokario Lietuvos geriausiųjų pedagogų darbais [6, 7, 12–14]. Pasitaiko tokių pavyzdžių ir dabartinių mokytojų pamokose. Antai Juodupės pradinėje mokykloje (Rokiškio raj.) IV klasėje mokytoja metodininkė Liucija Venslovienė labai sumaniai susiejo pamokoje spręstus uždavinius su artėjančiomis šv. Kalėdomis, kurių nuotaika jautėsi visoje mokykloje. Uždavinius mokiniams, kuriuos jie atliko savarankiškai, ji suformulavo taip: „Prieš šv. Kalėdas jums pateiktuose lapeliuose, kuriuose nupiešta prekė ir parašyta jos kaina, kiekvienai prekei buvo padaryta nuolaida, lygi $^1/_9$ kainos. Apskaičiuokite, kiek kainuos kiekviena prekė“. (Mokytoja išdalijo reklaminių lapelių kopijas, uždažiusi naują prekės kainą).

Būdingas sovietmečio matematikos mokymo bruožas buvo tas, kad mokant matematikos žinių taikymu praktikoje buvo laikomas beveik vien abstraktaus pobūdžio treniruojamųjų uždavinių sprendimas. Tie uždaviniai jau būdavo išreikšti matematine kalba, kurios realiame gyvenime nevartojame. Taip mokant dalis mokinių įgydavo kartais netgi gana sudėtingų matematinių uždavinių sprendimo įgūdžių, bet pasirodydavo esą visiškai bejėgiai, kai reikėdavo spręsti net nesudėtingus uždavinius, suformuluotus ne matematine, bet gimtąja mokinių kalba. Mokėjimas matyti ir atskirti matematinę uždavinio pusę nuo jo konkretaus turinio pasiekiamas tik ilgomis pratybomis. O tai buvo nemaža našta mokytojams, nes to meto vadovėliai, parašyti ir išleisti Maskvoje, negalėjo garantuoti realaus ryšio su gyvenimu, vykstančiu kur nors Vladivostoke, Taškente, Murmanske ar Kaune. Dabar padėtis Lietuvos mokyklose kita. Tuo galima įsitikinti pavarčius bet kurį lietuvišką matematikos vadovėlį. Ypač pavyzdinis šia prasme – Nijolės Cibulskaitės vadovėlis penktokams [37, 38].

Mokykloje uždavinio petvarkymas matematine kalba realizuojamas sudarant lygtį ar jų sistemą iš sąlygos. Šios veiklos metodika gana plačiai nušviesta matematikos didaktikoje, tačiau nėra bendro metodo (algoritmo), kaip tai atlikti. Netgi tokia rekomendacija – pažymėti x ieškomąjį dydį – ne visada universali, nes daugeliu atvejų tai veda į neracionalų sprendimo kelią. Tačiau algebrinis uždavinių sprendimas, būdamas bendras, leidžia išspręsti labai įvairios struktūros uždavinius, todėl lavina mokinių mąstymo lankstumą, moko juos konkrečią uždavinio situaciją išreikšti abstrakčiu matematiniu modeliu, tinkamu visiems analogiškos struktūros, bet kitokio konkretaus turinio uždaviniams. Aritmetinis sprendimo būdas taikytinas tik ten, kur yra racionalesnis už algebrinį.

5. UŽDAVINIAI KAIP MATEMATINĖS VEIKLOS MOKYMO PRIEMONĖ

Matematikos mokymas per tikslingai parinktus uždavinius – seniai žinoma ir plačiai analizuojama problema. Tačiau iki galo ji dar nėra išspręsta. Uždaviniai turi būti ir tolesnio teorijos plėtojimo motyvas (naujų sąvokų įvedimas, naujų nagrinėjamų objektų savybių atradimas bei įrodymas), ir jos efektyvaus taikymo galimybė. Mokymo praktikoje mokymu per uždavinius naudojamasi tik nagrinėjant kai kurias temas. Geras pavyzdys – skaičiaus sąvokos plėtimas. Specialiai parinkus uždavinius nustatomas žinomos šiame etape skaičių aibės nepakankamumas, būtinumas ją praplėsti, kad būtų galima išspręsti parinktus uždavinius. Praplėtus aibę, išnagrinėjus jos struktūrą, vėl grįžtama prie pradinių (ir kitų) uždavinių, kurie šioje aibėje gali būti išspręsti. Taigi mokymas atliekamas pagal schemą: *uždaviniai* $\rightarrow$ *teorija* $\rightarrow$ *uždaviniai*. Reikia šią schemą taikyti plačiau. Tai atliekama pradedant nuo nematematinių probleminių situacijų nagrinėjimo ir atitinkamų uždavinių formulavimo. Po to formuluojamas tikslas išspręsti šiuos uždavinius matematiškai. Pirmas žingsnis – uždavinio pertvarkymas taip, kad jame figūruojantys ryšiai taptų matematiniais. Galimas daiktas, kad čia išryškės, jog mūsų turimos matematinės priemonės tam bus nepakankamos. Šie atvejai visada turėjo didžiulę reikšmę pačios matematikos raidoje ir yra itin svarbūs mokant matematikos.

Kartu būtina pažymėti, kad ne visada naujų sąvokų įvedimas gali būti motyvuojamas praktiniais uždaviniais, kylančiais šalia matematikos: jie gali kilti ir iš vidinių matematinių poreikių (pvz., neigiamųjų, trupmeninių, kompleksinių skaičių įvedimas), todėl, ypač vyresniosiose klasėse, reikia tai akcentuoti.

6. BENDRIEJI UŽDAVINIŲ SPRENDIMO MOKYMO METODAI

Kaip išmokyti mokinius spręsti uždavinius – klausimas, kuris yra vienas sudėtingiausių matematikos didaktikos problemų. Sudėtingumas paaiškinamas tuo, kad neegzistuoja (ir negali egzistuoti) bendras uždavinių sprendimo algoritmas, kurio įvaldymas garantuotų gebėjimą išspręsti bet kurį uždavinį. Yra specialūs algoritmai tik konkretiems uždavinių tipams. Kitiems uždavinių tipams jie netinka. Yra uždavinių tipų, kuriems tokie algoritmai dar neatrasti. Aišku, mokykloje jų ir neatrasime. Tačiau reikia mokinius pratinti spręsti netipinius uždavinius, kuriuose reikia kombinuoti išmoktus tipinių uždavinių sprendimo algoritmus.

Bandymas pateikti bendrąją metodiką, kaip mokyti spręsti uždavinius, pateiktas D. Poja knygoje [135]. Joje detaliai išanalizuoti keturi uždavinio sprendimo proceso etapai: *uždavinio sąlygos supratimas*, *sprendimo plano sudarymas*, *jo realizavimas* ir *nagrinėjimas* (*patikrinimas*). Ši įdomi, detali knyga naudinga pedagogui matematikui. Reikėtų ją išversti ir į lietuvių kalbą. Tačiau bendro metodo bet kokio tipo uždaviniams spręsti joje irgi nėra.

7. SPECIALIEJI METODAI (ALGORITMAI)

Tai algoritmai spręsti tipiniams uždaviniams. Vidurinėje mokykloje tikslinga išmokyti spręsti tokių tipų uždavinius.

1. Uždaviniai, sprendžiami aritmetiškai

1.1. Pradinės klasės:

1.1.1. Paprastieji uždaviniai: a) sudėtis (dviejų ar kelių dėmenų sumos apskaičiavimas; skaičiaus padidinimas keliais vienetais); b) atimtis (liekanos (skirtumo) apskaičiavimas; skaičiaus sumažinimas keliais vienetais; dviejų skaičių skirtuminis palyginimas); c) daugyba (kelių lygių dėmenų sumos apskaičiavimas; skaičiaus padidinimas kelis kartus); d) dalyba (*dalyba į lygias dalis*: skaičiaus dalijimas į kelias lygias dalis; skaičiaus sumažinimas kelis kartus; skaičiaus dalies nustatymas; *talpos dalyba*: nustatymas, kiek kartų vienas skaičius telpa kitame; kartotinis dviejų skaičių palyginimas).

1.1.2. Sudėtiniai uždaviniai: a) triskaitės taisyklės uždaviniai; b) judėjimo uždaviniai.

1.2. Vyresniosios klasės:

1.2.1. Dviejų skaičių santykio nustatymo uždaviniai.

1.2.2. Proporcingosios dalybos uždaviniai.

2. Geometriniai uždaviniai

2.1. Pagrindiniai braižymo uždaviniai, atliekami skriestuvu ir liniuote.

2.2. Braižymo uždaviniai:

2.2.1. Geometrinių vietų metodo taikymas.

2.2.2. Geometrinių transformacijų metodų taikymas (simetrija, lygiagretusis postūmis, posūkis).

2.2.3. Panašumo metodo taikymas.

3. Uždaviniai, sprendžiami algebros ir analizės priemonėmis

3.1. Tiesinių lygčių taikymo uždaviniai.

3.2. Dviejų tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.
3.3. Kvadratinių lygčių taikymo uždaviniai.
3.4. Uždaviniai, sprendžiami taikant nelygybes (tiesines ir kvadratines).
3.5. Paprasčiausių transcendentinių lygčių sprendimo uždaviniai (rodiklinės, logaritminės ir trigonometrinės lygtys).
3.6. Tiesinės, kvadratinės, rodiklinės, logaritminės ir trigonometrinių funkcijų tyrimo bei taikymo uždaviniai (elementariomis priemonėmis ar taikant išvestines bei integralus).

8. ANALIZĖ IR SINTEZĖ SPRENDŽIANT UŽDAVINIUS

8.1. Matematinis uždavinys

Matematiniu uždaviniu laikomi ir įprasti mokykliniai uždaviniai, ir tie teoriniai klausimai, su kuriais mokiniai pirmiausia susiduria kaip su uždaviniais.

Senovės tautos – egiptiečiai, babiloniečiai, indai didelį dėmesį skyrė uždavinių sprendimui. Antai antikinės Graikijos geometrai detaliai ištobulino braižymo uždavinių sprendimo schemas. Šiuos uždavinius jie vadino problemomis. Todėl tokių uždavinių sprendimo metu atliekama analizė vadinama problemine analize. Vieną iš esminių braižymo uždavinių sprendimo dalių graikai vadino „*apagoge*“ (απαγωγη) – *perdirbimu*.

Kiekviename uždavinyje nurodoma, kas yra duota, ir keliamas reikalavimas, ką reikia atlikti, surasti. Kad uždavinį būtų galima išspręsti, būtina, kad tarp ieškomųjų ir duotųjų dydžių būtų funkcinė priklausomybė. Taigi kiekvienas uždavinys susideda iš sąlygos, funkcinių priklausomybių tarp dydžių ir reikalavimo (klausimo).

Mokykliniuose uždaviniuose dažniausiai pateikiamas toks duomenų kiekis, kad galima gauti vieną ar kelis apibrėžtus sprendinius. Tokius uždavinius vadiname *apibrėžtaisiais*. Jei duomenų yra daugiau, negu tai būtina uždaviniui išspręsti, tai uždavinys vadinamas *per daug apibrėžtu*. Kai kuriais atvejais tokie uždaviniai gali būti išspręsti, bet dažniausiai jie neturi sprendinių. Jei duomenų nepakanka, uždavinys laikomas *nepakankamai apibrėžtu*. Tokie uždaviniai turi be galo daug sprendinių.

8.2. Sintetinis uždavinių sprendimo būdas

Kai kuriuos uždavinius galima išspręsti be ypatingos sprendimo plano ir būdo paieškos – jie dažnai būna akivaizdūs. Todėl čia taikomas sintetinis sprendimo būdas. Jo esmė: panaudojant kai kuriuos uždavinyje duotus duomenis, apibrėžiami pagalbiniai dydžiai, t. y. sprendžiama pagalbinių uždavinių serija. Po to, taikant šių uždavinių sprendimo rezultatus ir galbūt kai kuriuos uždavinio duomenis, sprendžiama kita pagalbinių uždavinių serija. Taip elgiamasi ir toliau, kol gaunamas ieškomasis dydis.

8.3. Sintetinio sprendimo būdo reikšmė mokant matematikos

Taikant sintetinį sprendimo būdą, sprendimas prasideda nuo kai kurių uždavinio duomenų ir vyksta ieškomojo dydžio radimo kryptimi. Todėl sintetiniam sprendimo būdui yra būdingi tie patys teigiamieji ir neigiamieji bruožai, kaip ir sintetiniam įrodymo būdui. Nėra kriterijaus, nuo kurių uždavinio duomenų reikia pradėti sprendimą ir kokius pagalbinius dydžius reikia surasti. Nėra kriterijaus ir kokius kitus papildomus uždavinius reikia pasirinkti. Esant sudėtingesniam uždaviniui, sprendžiantysis gali aiškiai ir neįsivaizduoti, ar jis teisingai pasirenka pagalbinius uždavinius, ar jis pasieks norimą rezultatą. Taigi sintetinis būdas mažai tinka sudėtingų uždavinių sprendimo planams sudaryti.

Tačiau sintetinis būdas gali būti sėkmingai pritaikytas nelabai sudėtingiems uždaviniams spręsti. Čia turi reikšmės sėkmingi spėjimai, kurių pagrindas – analogija tarp sprendžiamojo uždavinio ir anksčiau išspręstųjų. Sintetinis būdas daugiausiai taikomas užrašant uždavinių sprendimą. Būtina pabrėžti, kad sintetinis būdas beveik niekada netaikomas kaip vienintelis. Kartu su sinteze taikoma ir analizė, nors gal ir neišreikštine forma, uždavinį sprendžiančiojo gal ir nesuvokiama.

8.4. Analizinis uždavinių sprendimo būdas

Analizė padeda sukurti uždavinio sprendimo planą. Analiziniam būdui yra būdingas ieškomojo dydžio nagrinėjimas, nustatant jo ryšius su duotaisiais dydžiais.

8.5. Analizinio būdo įvairovė

Dar senovės Graikijoje, kaip jau minėjome, geometrai detaliai parengė braižymo uždavinių sprendimo planus. Todėl jų taikyta analizė dažnai vadinama *klasikine* (lot. „*classicus*“ – pavyzdinis). Klasikinei analizei būdinga tai, kad ji tik padeda rasti sprendimo planą, o po to sprendžiama sintetiniu metodu.

Jei analizėje naudojama algebrinė simbolika, lygtys ar jų sistemos, tai turime *algebrinę* analizę. Čia kintamieji dydžiai pažymimi raidėmis, kuriomis operuojama kartu su duotaisiais dydžiais, sudaroma lygtis ar lygčių sistema. Analizinis ir sintetinis metodai čia susilieja.

8.6. Apie sprendinių praradimą ar pašalinių sprendinių atsiradimą

Jei pagrindinio uždavinio perdirbimas į pirmąjį pagalbinį uždavinį atliekamas taip, kad pagrindinio uždavinio sąlygos yra pagalbinio uždavinio sąlygų išdava, arba toks santykis egzistuoja tarp dviejų gretimų pagalbinių uždavinių, tai gali atsitikti, kad kuris nors pagalbinis uždavinys nebus ekvivalentus pagrindiniam. Tada galimas sprendinių praradimas. Pvz., jei abi lygties puses dalijame iš reiškinio su kintamuoju ir nepriimame sąlygos, kad jis negali būti lygus nuliui, galime prarasti sprendinius.

Jei pagrindinio uždavinio perdirbimas į pirmąjį pagalbinį atliekamas taip, kad pagalbinio uždavinio sąlygos išplaukia iš pagrindinio uždavinio sąlygų, arba toks sąryšis stebimas tarp dviejų pagalbinių uždavinių sąlygų, tai vėl paskutinis pagalbinis uždavinys gali būti neekvivalentus pagrindiniam ir gali atsirasti pašalinių sprendinių. Pvz.:

$$\sqrt{x^2 - 3} + 1 = 0,$$

$$\sqrt{x^2 - 3} = -1,$$

$$x^2 - 3 = 1,$$

$x_1 = 2$, $x_2 = -2$ (abi šaknys sąlygos netenkina).

8.7. Aritmetiniai uždaviniai

Analizė aritmetiniuose uždaviniuose taikoma sprendimo planui sudaryti. Sprendimas atliekamas sintetiniu būdu. Kartais analizė uždavinio sprendimo planui surasti atliekama neišsamiai – svarbu išsiaiškinti sprendimo planą. Kai kada analizė atliekama tik žodžiu. Tokiais atvejais analizę vadiname *daline*.

Svarbu mokinius išmokyti spręsti uždavinius pasirenkant teisingą kryptį, o tam reikia laikytis tam tikrų taisyklių: a) jei žinai uždavinio sprendimo planą – spręsk; b) jei uždavinys tipinis, prisimink šio tipo uždavinių sprendimo planą ir spręsk; c) jei nežinai sprendimo plano, tai žiūrėk į uždavinio klausimą ir klausk savęs: *Ką reikia rasti? Ką reikia žinoti, kad atsakytum į šį klausimą? Ar duoti skaičiai, būtini tam atsakymui? Jei tie skaičiai neduoti, ar negalima jų nustatyti? Kaip nustatyti?* ir t. t.; po šios analizės numatyk sprendimo planą ir spręsk; d) patikrink gautą atsakymą.

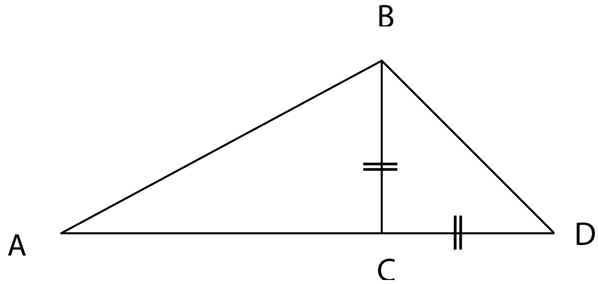
Sprendžiant tipinius uždavinius analizė įgyja savitas, ypatingas formas. Iš esmės tipiniai aritmetiniai uždaviniai yra algebriniai, todėl ir jų analizė yra algebrinė.

8.8. Analizinis metodas sprendžiant braižymo uždavinius

Tik paprasčiausi braižymo uždaviniai gali būti išspręsti nesudarius išankstinio sprendimo plano (tai – pagrindiniai braižymo uždaviniai, trikampių braižymo uždaviniai, kai duoti pagrindiniai jų elementai, ir kai kurie kiti). Sudėtingesniais atvejais reikalinga analizė, tik po jos atliekamas braižymas, po jo – įrodymas ir tyrimas.

Pavyzdys. Reikia nubraižyti statųjį trikampį, kurio vienas smailusis kampas lygus duotajam kampui, o statinių suma lygi duotajai atkarpai.

Analizė. Tarkime, kad stačiojo trikampio ABC (27 pav.) kampas A lygus duotajam kampui, statinių suma AC + BC lygi duotajai atkarpai. Natūralu ištiesti laužtę ACB, t. y. nubrėžti atkarpą AD, lygią duotajai atkarpai. Jei iš duomenų galėtume nubraižyti



27 pav.

trikampį ABD, tai trikampį ABC nubraižyti būtų nesunku. Kadangi žinomas trikampio ABD kampas A ir kraštinė AD, tai užtenka sužinoti kampą D. Pastebėję, kad trikampis BCD yra status ir lygiašonis (BC = CD), sprendžiame, kad $\angle$ D = 45°.

Braižymas. Nubraižome trikampį ABD, kurio kraštinė AD lygi duotajai atkarpai, kampas A lygus duotajam kampui ir $\angle$ D = 45°. Per šio trikampio viršūnę B brėžiame tiesę, statmeną tiesei AD, ir randame tų tiesių sankirtos tašką C. Trikampis ABC – ieškomoji figūra.

Įrodymas. Kadangi $\angle$ BCD = 90°, o $\angle$ D = 45°, tai trikampis BCD yra lygiašonis. Vadinasi, CD = BC, AD = AC + BC, t. y. trikampis ABC atitinka uždavinio sąlygą.

Tyrimas. Ieškomasis trikampis egzistuoja, kai duotasis kampas yra smailus. Kadangi visi trikampiai, nubraižyti iš nurodytųjų duomenų, yra lygūs, tai sprendinys vienintelis [46, p. 94 – 95].

Planimetrijos braižymo uždaviniams spręsti yra sukurti ir kiti specialūs metodai: „geometrinių vietų“ metodas, įvairūs transformacijų metodai, algebrinis metodas [46].

8.9. Algebrinė analizė sprendžiant uždavinius

Bendras uždavinių sprendimo sudarant lygtis ar jų sistemas metodas yra analitinis– ta jo atmaina, kurią vadiname algebrine analize. Ją taikant, išreiškiami nežinomųjų, ieškomųjų ir duotųjų dydžių tarpusavio sąryšiai. Tam ieškomieji, nežinomieji dydžiai pažymimi raidėmis, po to su jais operuojama, kaip su žinomais dydžiais ir, pasinaudojant duotaisiais dydžiais, apskaičiuojamos tarpinių dydžių išraiškos. Toliau sudaroma lygtis ar lygčių sistema. Tekstinio uždavinio pertvarkymas į „lygčių kalbą“ yra pirmas uždavinio perdirbimas, o lygtis ar jų sistema – pirmas pagalbinis uždavinys. Kiekvienas žingsnis sprendžiant – uždavinio perdirbimas į kitą pagalbinį uždavinį. Perdirbimas tęsiasi, kol negauname pagalbinio uždavinio, kuris sprendžiamas tiesiogiai. Taigi visi charakteringieji analizės bruožai pasireiškia ir sprendžiant uždavinius, sudarant lygtis ar jų sistemas iš sąlygų.

8.10. Geometriniai skaičiavimo uždaviniai

Mokiniai palaipsniui turi įsisavinti tokių uždavinių sprendimo taisykles. Jeigu: 1) susipažinus su uždavinio sąlyga, galima numatyti jo sprendimo planą, reikia jį realizuoti; 2) plano iš karto nesimato, reikia jo ieškoti analizės keliu; 3) pasirinktoji analizės forma neduoda efekto, tada mokinys taiko algebrinę analizę; 4) kartais jos vienos nepakanka, tad tenka susieti visas analizės formas.

9. UŽDAVINIŲ VAIDMUO MOKANT MATEMATIKOS

Žmogaus ir visuomenės veikla – kasdieninis įvairiausio turinio uždavinių sprendimas. Dalis jų sprendžiama pagal iš anksto numatytus veiklos planus, kiti iškyla atsitiktinai, neplanuoti, ir pastaruosius kartais prireikia spręsti tam tinkamai nepasirengus. Daugelio uždavinių sprendimas reikalauja kūrybiškumo arba bent gebėjimų surasti duotomis sąlygomis daugiau ar mažiau optimalų sprendimą. Todėl nestebina tas dėmesys, kuris skiriamas uždavinių sprendimui: „Beveik visada bet kuri žmogaus veikla – darbas ar žaidimas – gali būti nagrinėjama kaip situacija, kurioje reikia priimti sprendimus, t. y. tokia situacija, kada vienas žmogus ar jų grupė susiduria su būtinumu pasirinkti kurį nors iš keleto veiksmų (nors iš dviejų). Todėl žmogaus veiklos nagrinėjimą galima iš esmės laikyti žmogaus elgsenos jo pasirinkimo metu, t. y. situacijos, kada būtina priimti sprendimą, nagrinėjimu“ [124, p. 16].

Iš tiesų, jei matematinio uždavinio sąvoka traktuojama plačiai (kiekvieną teoremą taip pat laikant uždaviniu), tai uždavinių sprendimas yra vienintelė matematinės veiklos galimybė. Mokėjimas spręsti matematinius uždavinius yra ryškiausia mokinių matematinio mąstymo būklės charakteristika, rodanti matematinio išsilavinimo lygį.

Žymus anglų matematikas Viljamas Sojeris (*Sawyer*, g. 1911) teigia, kad matematinės žinios yra instrumentas ir nėra prasmės jų įsisavinti, jei nemanoma bei nemokama jomis naudotis [140].

Nors matematinių mokyklinių uždavinių formulavimo problema jau seniai yra ir matematikos didaktikos specialistų bei psichologų dėmesio centre, tačiau tik dar labai neseniai pradėta spręsti šią problemą.

Jei palygintume matematikos uždavinių sprendimo ir kokio nors amato profesinį mokymą, tai pastarajame stebime, kad mokinys kruopščiai mokomas dirbti su instrumentais, kiekvienas jo dirbinys kruopščiai apžiūrimas meistro, kuris nurodo defektus, pamoko, kaip reikia elgtis su instrumentais, kad išvengtų tų defektų ateityje. Mokinys visiškai suvokia mokomąjį savo veiklos pobūdį, stengiasi įsisavinti būtent tuos instrumentus, kurie bus jam būtini savarankiškoje profesinėje veikloje. Matematinių uždavinių sprendimas yra kiek kitas reikalas. Beveik visi mokiniai mano, kad, gavus uždavinio atsakymą, sutampantį su uždavinyno gale pateiktuoju, darbas baigtas, spręstąjį uždavinį galima ir reikia pamiršti.

Taigi mokiniai (taip pat ir daugelis mokytojų) užmiršta, kad kiekvienas uždavinys turi mokomąjį pobūdį, kad kiekvienas uždavinys turi mokyti orientuotis įvairiose probleminėse situacijose, gausinti žinias, plėsti patyrimą, mokyti matematinės veiklos.

Natūralu, kad spręsdami uždavinius mokiniai sukaupia tam tikrų žinių, susijusių su konkrečiomis probleminėmis situacijomis ar sprendimo būdais. Tačiau efektyviam darbui sprendžiant naują uždavinį, su naujomis sąlygomis, reikia, kad įgytas ankstesnis patyrimas būtų reikiamai sutvarkytas. Būtina, kad įvairią informaciją, įgyjamą uždavinio sprendimo metu, mokiniai vertintų kritiškai, kad būtų sumuojami rezultatai po kiekvieno uždavinio sprendimo. Svarbiausia, kad tokios veiklos reikia mokyti.

Svarbu turėti omenyje, kad tokios rūšies veikla yra viena iš visaverčio mąstymo charakteristikų. Rusų psichologas S. Rubinšteinas teigė, kad mąstymas – tai žinių *aktualizacija* (lot. „*actualis*“ – tikras, faktiškas) ir taikymas, kurie yra vieningas procesas. Aktualizacija – reikalingų žinių ir metodų pasirinkimas iš turimos patirties bei jų panaudojimas naujomis sąlygomis [139].

Taigi tradicinėje uždavinių sprendimo metodikoje daug dėmesio skiriama matematinių žinių taikymui ir nekreipiamas dėmesys į tų žinių aktualizaciją. Taip pažeidžiama matematinio mąstymo proceso vienovė ir todėl neužtikrinamas sėkmingas mąstymo ugdymas.

Yra nustatyti keturi pagrindiniai bruožai, skiriantys intelektą nuo paprasto gebėjimo skaičiuoti – tai gebėjimas:

1) sėkmingai perdirbti ir sujungti informaciją priklausomai nuo jos reikšmingumo;
2) atlikti bandomuosius veiksmus, paiešką ir veiksmus, neišplaukiančius iš esamos informacijos, t. y. atlikti šuolį per tarpą, esantį duomenyse;
3) valdyti tiriamąjį procesą, vadovaujantis jausmu, kad sprendimas – arti;
4) nagrinėti ribotą, bet pakankamai platų teiginių ir išvadų ratą, sutampantį su duotuoju teiginiu.

Šiuose teiginiuose nesunku pastebėti apibrėžtą matematikos mokymo tikslų charakteristiką – tai jau ne kartą minėtas mokymas tam pasitelkiant uždavinius. Remiantis šiais tikslais, galima ir naudinga pakeisti ir uždavinių sprendimo mokymo metodiką.

Ar tradicinė mokyklinė matematinių uždavinių sistema tenkina šiuos tikslus? Kol kas ne. Dėl susiklosčiusių tradicijų ši uždavinių sistema kol kas nelabai kinta. Dauguma uždavinių – treniruojantieji pratimai. Jau ne kartą minėtas D. Poja pabrėžė, kad uždaviniai gali būti *šabloniški* (vok. „*schablone*“ – pavyzdys, modelis) ir *nešabloniški*. Pirmieji yra būtini ir naudingi temos nagrinėjimo pradžioje, susipažįstant su formulių, algoritmų, teoremų, dėsnių pradiniu taikymu (*reprodukcinis* (pranc. „*reproduction*“ – atgaminimas) lygis).

Dažnai būna taip, kad tas matematinis faktas, kurį nagrinėja atitinkamas uždavinių ir pratimų ciklas, pasimeta tarp tų uždavinių ir pratimų. Matematikos didaktikoje buvo atvejų, kai tas ciklas tapdavo savarankišku mokomuoju vienetu – tai nemaža aritmetinių uždavinių tipų, kurie aritmetiškai sprendžiami gremėzdiškai, o algebriškai, kai lygtys ar jų sistemos sudaromos iš sąlygos, – kur kas paprasčiau.

Pirmiausia, uždavinių sprendimo mokymas (ir mokymas per uždavinius) mokykloje turi padėti giliai suvokti ir tvirtai įsisavinti tą matematinių žinių ir mokėjimų sistemą, kuri numatyta mokymo programoje. Tačiau uždavinių ir pratimų kiekis turi atitikti norimą mokymo rezultatą ir jo reikšmingumą visoje matematinio ugdymo sistemoje.

Ta mokinių energija ir tas laikas, kurie atsilaisvins sukūrus minimaliai būtiną uždavinių ir pratimų sistemą, gali būti panaudoti kitiems tikslams. Ypač svarbu formuoti mokinių mokėjimą orientuotis naujose situacijose, kaupti informaciją, naudingą kitų uždavinių sprendimui, įsisavinti kitas matematikos tiesas ir t. t. Būtent šis matematikos mokymo per uždavinius būdas yra suformuluotas F. Džonsono (*Johnson*) knygoje [121]. Mokymas per uždavinius turi:

1) sudominti arba motyvuoti;
2) atvesti prie procesų atskleidimo arba padėti suprasti santykius;
3) praktikuoti ir tobulinti uždavinių sprendimo techniką;
4) formuoti matematinio modelio sąvoką [121, p. 107].

Kalbant apie matematinių uždavinių vaidmenį ugdant mokinių matematinius gebėjimus kūrybinei pažintinei savarankiškai veiklai, pažymėtina probleminio pobūdžio uždavinių reikšmė.

Teisingas uždavinių ir pratimų taikymas matematikoje apibrėžia šiuolaikinę jų mokymo metodiką. Ja remiantis uždaviniai gali būti taikomi: 1) įvedant mokinius į naujos temos nagrinėjimą; 2) parengiant savarankiškam darbui, susijusiam su kurio nors matematinio fakto nustatymu; 3) giliam teorinės medžiagos įsisavinimui, suformuojant būtinus mokėjimus bei įgūdžius; 4) sužadinant interesą matematikai; 5) įtraukiant mokinius į kūrybinę (ieškomąją) matematinę veiklą; 6) ugdant mokinių matematinį mąstymą.

10. MOKINIŲ RENGIMAS EURISTINEI VEIKLAI SPRENDŽIANT UŽDAVINIUS

Kiekvieno matematinio uždavinio sprendimas realizuojamas keturiais pagrindiniais etapais:

1) uždavinio sąlygos ir reikalavimų supratimas, kuris pasiekiamas suvokiant atskirus sąlygos elementus ir jų visumą;
2) sprendimo plano sudarymas;
3) plano praktinis realizavimas;
4) galutinis uždavinio ir jo sprendimo nagrinėjimas, kurio tikslas – įsisavinti tuos klausimus, kurie gali būti naudingi toliau sprendžiant uždavinius.

Ypač svarbus pirmasis etapas: dažnai uždavinio sprendimas nutrūksta būtent šiame etape, mokinys praranda tikėjimą savo jėgomis. Todėl reikia padėti mokiniams suvokti uždavinio sąlygą, įsigyventi į ją, suvokti jos ypatybes, bendrais bruožais numatyti galimas sprendimo kryptis ir prisiminti reikiamas teorines žinias. Kad mokiniams būtų lengviau suvokti uždavinio sąlygą, galima jiems pateikti tokią atmintinę:

1) Pradėkite nagrinėti uždavinio sąlygą pasidarydami kruopščiai nubraižytą ir vaizdų brėžinį ar iliustracinę schemą. Atsiminkite, kad teisingas grafinis uždavinio sąlygos pavaizdavimas reiškia tikslų, aiškų ir konkretų viso uždavinio situacijos suvokimą.
2) Stenkitės aiškiai ir detaliai įsivaizduoti visa, kas susiję su duotuoju uždaviniu. Kruopščiai išsiaiškinkite, kas yra duota ir ką reikia nustatyti; išskirkite tai, kas svarbiausia uždavinio sąlygos tekste ir būtent ties tuo klausimu sutelkite savo dėmesį. Išskirkite brėžinyje duotuosius ir ieškomuosius dydžius skirtingomis, ryškiomis spalvomis.
3) Kruopščiai patikrinkite kiekvieną uždavinio sprendimo procese suformuluojamą teiginį kontroliniais klausimais. Kontrolinių klausimų pavyzdžiai: a) *Ką tai reiškia?* b) *Kokiu pagrindu tai tvirtinama?* c) *Kokia nauda iš šio fakto?* ir pan.
4) Patikrinkite, ar gerai suformuluota uždavinio sąlyga (ar nėra joje nereikalingų duomenų? gal kai kurių duomenų trūksta?).

Pirmasis atmintinės punktas yra itin svarbus mokant spręsti geometrinius uždavinius, nes kaip tik geometrijoje vaizdus ir tikslus brėžinys leidžia kartais iš pirmo žvilgsnio surasti galimus sprendimo kelius.

Svarbų vaidmenį atlieka ir tikslus simbolinis sąlygos duomenų pažymėjimas. Pažymėjimų tikslumas ir sistemingas jų vartojimas ne tik gerina mokinių atmintį, bet kartu ir palengvina jos krūvį, padeda ekonomiškai mąstyti. Brėžiniai neturi būti smulkūs. Pagal galimybes reikia siekti laikytis mastelio vaizduojant atitinkamus dydžius, ypač svarbu laikytis mastelio vaizduojant dviejų ar kelių dydžių santykius.

Reikia perspėti mokinius, kad bendrųjų atvejų nelaikytų daliniais, pvz., vietoje bet kokio keturkampio nebraižytų stačiakampio, nes taip galima gauti klaidingas išvadas. Tas pats pasakytina ir apie visų elementų išdėstymą brėžinio eskize – kartais naudinga tuos elementus išdėstyti kitaip, nagrinėjant kitaip orientuotą figūros brėžinį.

Reikia žinoti, kad sprendžiant kiekvieną uždavinį svarbus yra klausimas: nuo ko priklauso duotasis ar ieškomasis dydis ir nuo ko jis nepriklauso? Mokėjimas formuluoti šį klausimą ir atsakyti į jį patvirtina funkcinio mąstymo bruožų buvimą. Funkcinis mąstymas ir pasireiškia būtent tuo, kad mąstantysis geba rasti ryšį tarp duotųjų ir ieškomųjų dydžių.

Norint sėkmingai išspręsti uždavinį labai svarbu yra paieškos kryptingumas, t. y. sąmoningas bandymų ir klaidų skaičiaus apribojimas. Paprastai bandymai bei klaidos būdingi pradinei sprendimo stadijai.

Kartais mokinys nesugeba savarankiškai išanalizuoti uždavinio ir išspręsti jį be mokytojo pagalbos. Jokiu būdu negalima tada pateikti jam gatavą sprendimą ar versti išmokti gatavą uždavinio sprendimo algoritmą. Nurodydami mokiniui esmines uždavinio sprendimo grandis, kurios bus tolesnės jo analizės priemonės, mokytojas galės mokinio mąstymą išjudinti.

Norint aktyvinti mokinių mąstymą sprendžiant uždavinius dažnai taikomas didaktinis metodas, vadinamas *nukreipiančiąja sistema*. Ji susideda iš pagalbinių uždavinių, klausimų ir t. t., ir, nepakeisdama mokinio mąstymo, suteikia jam reikalingą kryptį.

Uždavinių sprendimas reikalauja iš mokinių taikyti *kombinacinius* (lot. „*combinatio*“ – jungimas, derinimas) gebėjimus. Kombinaciniai gebėjimai – mokėjimas tinkamai pasirinkti *aktyvias* (lot. „*activus*“ – veiklus) ir *pasyvias* (lot. „*passivus*“ – neveiklus) žinias. Šis pasirinkimas ir ieškojimas turi būti tikslingi. Dažnai jis gali būti realizuotas remiantis tinkama analogija.

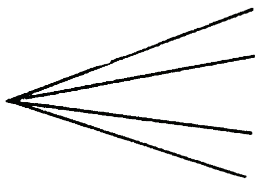
Iškilus pirmajam sunkumui mokinys turi prisiminti, kaip anksčiau buvo nugalėti panašūs sunkumai, kaip galima panaudoti turimą patyrimą naujomis sąlygomis. Tai skatina mokytojo klausimai: „*Kur anksčiau pasitaikė kas nors panašaus, kas nors gimininga, kur matėme vienodas charakteringas savybes?*“ ir pan. Ypač daug analogijų su planimetrija galima pritaikyti sprendžiant stereometrijos uždavinius. Labai naudinga analogija yra pradiniame uždavinio sprendimo etape. Jei jame analogiją pavyksta panaudoti, tai sąlygų, reikalavimų, sprendimo būdų tapatumas dažnai iš karto orientuoja mokinius pasirinkti vaisingas idėjas planuojant sprendimą.

Daugelis matematinių uždavinių sprendžiami, kaip jau pabrėžėme aukščiau, kaip daliniai, o pastarieji yra išskaidomi į paprastuosius uždavinius. Mokytojui būtina išmokyti vaikus tai atlikti.

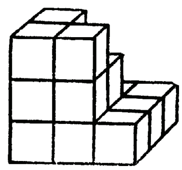
Svarbus mokinių matematinės veiklos aspektas – savarankiškas uždavinių sudarymas, kurį mokoma atlikti pagal iš anksto žinomas sąlygas, pagal analogiją su duotuoju uždaviniu ir t. t. Dažnai pasitaiko, kad gautasis uždavinys neturi realios prasmės, todėl jį ir jo sprendimą reikia visuomet kruopščiai aptarti. Pvz., autoriui dar sovietmečiu teko stebėti matematikos pamoką vienos Šiaulių miesto rusiškos mokyklos I klasėje. Pamokoje buvo gerai išaiškinti skaičiaus padidinimo keliais vienetais uždaviniai, eilė jų išspręsti žodžiu, raštu, kolektyviai ir savarankiškai. Paprašius sugalvoti panašių uždavinių, vienas guvus berniukas labai greitai tai atliko : „Vieno lėktuvo greitis yra 4 km/h, o kito 1 km/h didesnis. Koks antrojo lėktuvo greitis?“ (berniukas buvo karo lakūno sūnus). Žinoma, šis uždavinys buvo pripažintas tik matematiškai teisingu, tačiau gyvenimiškai nerealiu – kas gi skraidys lėktuvais, kurių greičiai tokie maži?

Susidomėjimas dalyku yra efektyvaus mokymosi sąlyga. Intereso nebuvimas, bodėjimasis mokomuoju dalyku – mokinių protinio abejingumo, pasyvumo priežastis. Kad matematikos pamokos būtų įdomios, būtina mokiniams ne tik atskleisti nagrinėjamos temos reikšmę, pasiekti, kad tai, ko mokomasi, būtų suprasta, bet ir visur, kur tai galima, kiek galint vystyti mokinių išradingumą, ugdyti poreikį dėmesingai nagrinėti pačius paprasčiausius klausimus, formuoti mokinių mąstymo lankstumą. Labai pagyvina matematikos pamokas ir didaktiškai yra labai naudingi įvairūs įdomieji uždaviniai, nešabloniški klausimai. Štai pora uždavinių, tikrinančių mąstymo lankstumą: 1) Kaip iš 3 degtukų jų nelaužant padaryti keturis? (IV) 2) Kiek kartų laiptai į šeštąjį namo aukštą ilgesni už laiptus į antrąjį šio namo aukštą? (5).

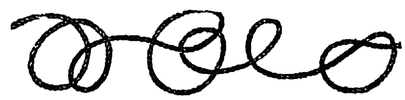
Dėmesingumą galima patikrinti uždaviniais: 1) Kiek kampų yra brėžinyje (28 pav.)? 2) Kiek kubelių yra geometriniame kūne (29 pav.)? 3) Kiek mazgų užsimegs virvutėje, ją už galų ištempus (30 pav.)? 4) Kurios figūros išklotinė pateikta 31 pav.? [127, p.178 – 179].



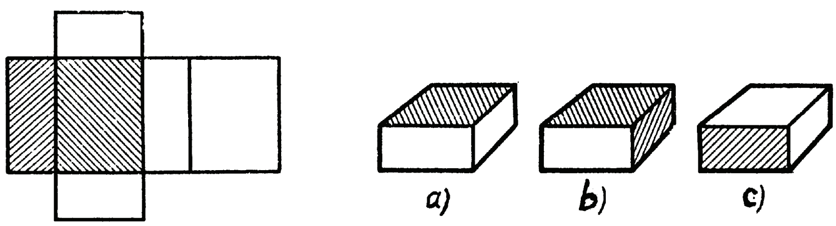
28 pav.



29 pav.



30 pav.



31 pav.

Labai naudingi uždaviniai, kuriuose prašoma atskleisti įvairiausius dėsningumus. Jie formuoja matematinio mąstymo įgūdžius: mokėjimą analizuoti, apibendrinti, rasti dėsningumus. Jų pavyzdžiai:

1) Turime dvi skaičių sekas: 2, 7, 12, 17, 22, ... ir 3, 10, 17, 24, 31, ... Abiejose sekose yra skaičius 17. Jei abi sekas pratęstume, koks būtų kitas bendras skaičius? [37, p. 48] 2) Įrašyti vietoje klaustuko reikiamą skaičių:

20	11	25	14	16	5
9		11		?	

3) Koks žodis šioje žodžių eilėje netinkamas: *akmuo, veiksmažodis, puodukas, knyga, langas*?

Turint omenyje, kad yra labai svarbu vystyti mokinių matematinį mąstymą, stiprinti jų domėjimąsi matematika, svarbu panaudoti panašius uždavinius ne tik užklasinėje veikloje, bet ir pamokose.

Svarbus yra mokytojo vaidmuo: jo kūrybiškumas, mokėjimas išradingai, reikiamu moksliniu lygiu paaiškinti naują medžiagą, teisingai parinkti uždavinius padeda visapusiškai lavinti mokinių matematinį mąstymą. Parinkdamas uždavinius, mokytojas turi išanalizuoti jų pedagoginę vertę, kiekvieną uždavinį įvertinti, atsakydamas į klausimus: a) koks mokomasis šio uždavinio pateikimo mokiniams tikslas? b) kokie matematinio švietimo elementai slypi jame? c) ar šį uždavinį būtina pateikti? d) kodėl tokie, o ne kitokie konkretūs dydžiai pateikti šiame uždavinyje? e) kodėl pasirinkta būtent tokia uždavinio sąlygos fabula? f) kodėl paimti būtent tokie skaitiniai duomenys? g) ar šie duomenys realūs? h) ar uždavinio fabula įdomi mokiniams, ar ji patraukli jiems ta prasme, kad sukelia norą uždavinį išspręsti? j) ar sugebės mokinys išspręsti šį uždavinį savarankiškai, ką jis turi žinoti, mokėti, atsiminti, įsivaizduoti, kad tai padarytų; jei mokinys negalės to padaryti, ką liudys tas faktas? k) kuo ir kiek mokiniui gali ir turi padėti mokytojas? l) kaip šis uždavinys yra susijęs su ankstesne ir būsima mokinio mokymosi veikla? Dabar mokytojui pačiam uždavinius parinkti tenka retai: už jį tai padaro vadovėlių, pratybų sąsiuvinių, uždavinynų autoriai. Puikiai į aukščiau pateiktus klausimus atsako dabartinių pradinių [25–28, 77–80] ir vyresniųjų [19, 37–39] klasių vadovėlių ir kt. priemonių autoriai. Tačiau mokytojas, rengdamasis pamokai, turi peržiūrėti autorių pateiktus uždavinius ir patikrinti, ar visi jie teigiamai atsako į minėtus klausimus. Taip įvertindamas kiekvieną uždavinį, mokytojas sugebės mažiausiomis laiko sąnaudomis pasiekti gerų tiek mokymo, tiek mokinių matematinio mąstymo lavinimo rezultatų. Kartu būtina atsiminti, kad mokytojas turi stengtis išmokyti panašiai vertinti uždavinių naudingąsias savybes ir mokinius.

Net ir labai geri mokiniai, gavę uždavinio atsakymą, laiko darbą su uždaviniu baigtu. Mokytojas turi nuolat priminti, kad jokio uždavinio sprendimo niekada negalima laikyti visiškai baigtu: visada lieka kas nors, apie ką galima ir reikia pamąstyti, galima patobulinti sprendimą, jį giliau apmąstyti, išryškinti naudingą ir naują mokiniams informaciją. Todėl išsprendus uždavinį reikia atkreipti dėmesį į sprendimo būdą, pabandyti ieškoti kitų, išsiaiškinti tai, ką būtina įsiminti, kas bus naudinga ateityje.

Vieno uždavinio sprendimas keliais būdais dažnai duoda didesnę naudą nei kelių uždavinių sprendimas vienu būdu, nes, įvertinant sprendimo būdus, aktyviai naudojamasi tokiomis mąstymo operacijomis, kaip analizė, lyginimas, apibendrinimas ir t. t. O tai neabejotinai turi teigiamą poveikį mokinių matematinio mąstymo vystymui.

Didaktikai yra naudingas ne tik aukščiau minėtas vieno uždavinio sprendimo būdų lyginimas, bet ir uždavinių lyginimas tarpusavyje, siekiant nustatyti jų bendrybes ir skirtingumus.

Natūrali galimybė tirti, kaip išspręstasis uždavinys susijęs su kitais, atsiranda tada, kai mokiniai analizuoja jo sprendimą: „Mokiniai suras, kad iš tiesų yra labai įdomu iš naujo apžvelgti sprendimą, jeigu jie garbingai dėjo pastangas, kad gautų tą sprendimą, ir suvoks, kad jie sėkmingai padirbėjo“, – rašė D. Poja [135, p. 24]. Apžvelgdami uždavinio sprendimą, mokiniai giliau ir aiškiau įsisavina visą išmoktą teorinę medžiagą ir geriau orientuojasi, kaip tikslingai ją pritaikyti įvairiems uždaviniams spręsti.

Uždavinių, tiek grynai matematinių, tiek iškylančių žmogaus gamybinėje veikloje ar buityje sąvoka naudojama jau seniai, bet ir dabar ir nėra pačios sąvokos „uždavinys“ apibrėžimo. Kalbama apie mokslo (matematikos, fizikos, chemijos ir t.t.), švietimo, politinius, ūkinius, techninius uždavinius, tačiau pati sąvoka nėra labai aiški. Pagrindinė to priežastis – sunkumai, trukdantys apibrėžti šią bendrąją sąvoką. Antra vertus, tyrinėtojus ir praktikus visada labiau domino uždavinių sprendimo proceso tyrimas.

Būtina pabrėžti, kad nėra tiksliai apibrėžta ir sąvoka „matematinis uždavinys“. Uždaviniu laikytina probleminė situacija, kurioje reikia surasti kurį nors nežinomą komponentą.

Jau ikimokykliniame amžiuje gyvenimas iškelia vaikams įvairių matematinių problemų, pvz., po lygiai pasidalyti kokius nors skanėstus, žaislus ir pan. Dar daugiau jų iškyla pradinėse klasėse: reikia padalyti knygas, sąsiuvinius, pieštukus ir t. t., keliant klausimą, ar užteks jų visiems. Tad dažniausiai probleminės situacijos nėra dirbtinės. Dar viena proga probleminėms situacijoms kurti – vaikų smalsumas. Juo nepasinaudojus, dalis vaikų gali tapti abejingi, apatiški, tai ima gimdyti tingumą, kuris virsta dykaduonyste, kuri sukelia gebėjimų nunykimo pavojų. Todėl matematikos mokymas turi būti įdomus, jis turi žadinti mintį, vystyti vaikų gebėjimus, atverti kelią tiek praktinei, tiek mokslinei veiklai.

Mokomosios problemos, kurios keliamos mokiniams, gali būti išspręstos arba per vieną, arba per kelias pamokas. Jos gali būti formuluojamos kaip paprasti klausimai, pvz.: 1) Kodėl trikampį vadiname trikampiu? Ar galima jį pavadinti kitaip, taip pat remiantis jo savybėmis? 2) Kaip paaiškinti pavadinimą „ištiestinis kampas“? ir pan.

Probleminės situacijos mokant matematikos iškyla taip pat tada, kai reikia patikrinti išvadą, padarytą pasinaudojant intuicija, analogija ar bandymu apibendrinti. Pvz.: 1) Tarp trikampio kampų ir kraštinių yra tam tikros priklausomybės. Ar jos išlieka ir keturkampiui? 2) Trikampio vidurinė linija yra lygiagreti pagrindui. O ar tai pasitvirtina rombui, lygiagretainiui, bet kuriam keturkampiui? ir t. t.

Savarankiškas bet kurios problemos tyrimas reikalauja iš mokinio mobilizuoti visas jo turimas žinias, parodyti išradingumą, originaliai mąstyti, mokėti kritiškai įvertinti problemos sąlygą bei klausimą. Tačiau būtina rimtos matematinės problemos sėkmingo išsprendimo sąlyga – gilios ir įvairiapusės žinios. Nedidelių matematinių problemų sprendimas remiasi ne tiek specialiomis žiniomis, kiek išradingumu bei nuovokumu. Šias mokinių proto savybes ir būtina vystyti.

Mokomųjų matematinių uždavinių sprendimo procese reikia skirti ypatingą dėmesį mokinių žinių *aktualizacijai* (lot. „*actualis*“ – faktiškas, tikras,). Čia padės specialiai parinktos uždavinių serijos, sukurtos taip, kad išmokytume mokinius tinkamai naudotis anksčiau sukauptu patyrimu ieškant naujo uždavinio sprendimo.

11. UŽDAVINIAI KAIP TEORIJOS TAIKYMO IR MATEMATINIO MĄSTYMO LAVINIMO PRIEMONĖ

Daugelis uždavinių yra dirbtinio pobūdžio, tačiau jų sprendimas būtinas, norint, kad sąmoningai būtų įsisavinta teorinė medžiaga. Antai jau ne kartą minėtas mokymas per uždavinius leidžia čia pateikti pora įtikinamų pavyzdžių: 1) lygties $a + x = b$ ($a > b$) sprendimas padeda suformuoti neigiamojo skaičiaus sąvoką; 2) lygties $x^2 = 2$ sprendimas – iracionaliojo skaičiaus sąvoką.

Uždaviniai turi savyje paslėptą informaciją, kurios ieškodamas besimokantysis turi savarankiškai remtis analize ir sinteze, indukcija ir dedukcija, analogija, lyginimu, apibendrinimu ir pan. Sprendžiant uždavinius, skatinama domėtis matematika ir mokymuisi apskritai, ugdomas savarankiškumas, valia, atkaklumas, meilė darbui, kryptingumas ir t. t.

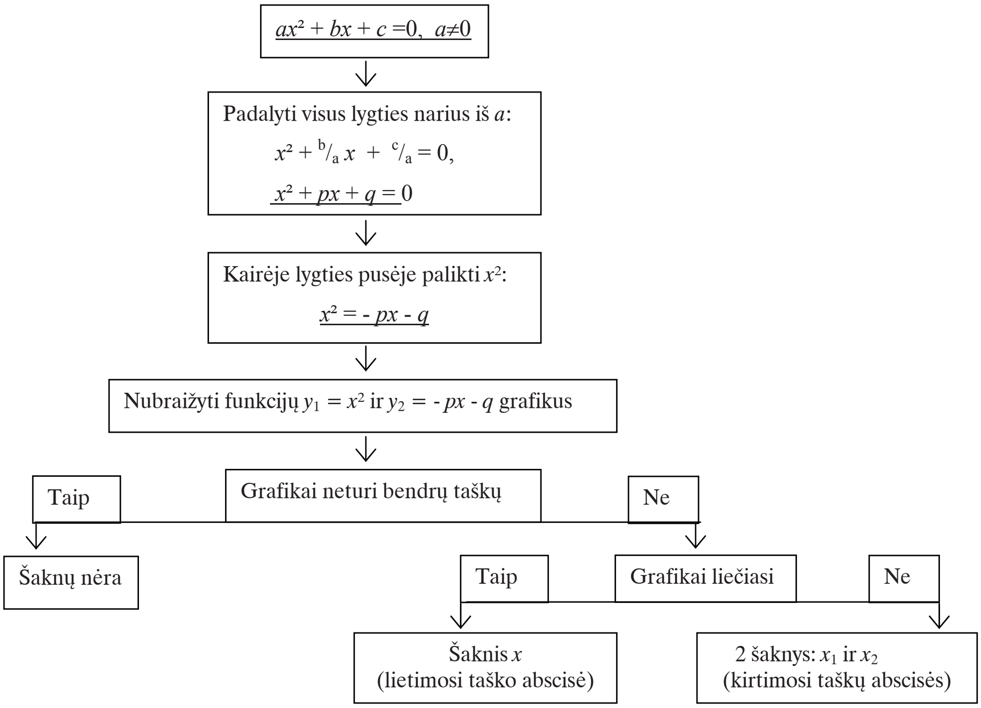
Analizuojant bet kurį uždavinį, reikia turėti omenyje dvi nesutampančias sąvokas – uždavinio „sudėtingumas“ ir „sunkumas“. Sudėtingumą apibūdina komponentų skaičius uždavinio sąlygoje, ryšių tarp jų skaičius, teoremų, taikomų sprendžiant uždavinį kiekis, ir t. t. Sunkumą apibūdina neįprastas uždavinio turinys, paslėpti ar aiškiai neišreikšti ryšiai tarp komponentų, ir t. t. Sunkūs uždaviniai reikalauja didesnio išradingumo, minties įtempimo, kūrybinio darbo. Jų reikia vengti mokiniams duodamuose kontroliniuose darbuose, jie – olimpiadų, konkursų medžiaga, papildomos užduotys stipresniesiems diferencijuojant mokymą.

Treniruojamųjų uždavinių sprendimo mokymo schema: 1) algoritmo pateikimas (taisyklės, tapatybės, formulės ir t. t.); 2) darbas įsisavinant algoritmą (pratimų sprendimas, palydimas nuorodomis į teorinę medžiagą, klaidų analizė, kiekvieno žingsnio pagrindimas); 3) treniravimas (mokytojo nuožiūra – tiek laiko, tiek apimties požiūriu); 4) ypatingų algoritmo taikymo atvejų nagrinėjimas; 5) įtvirtinimas.

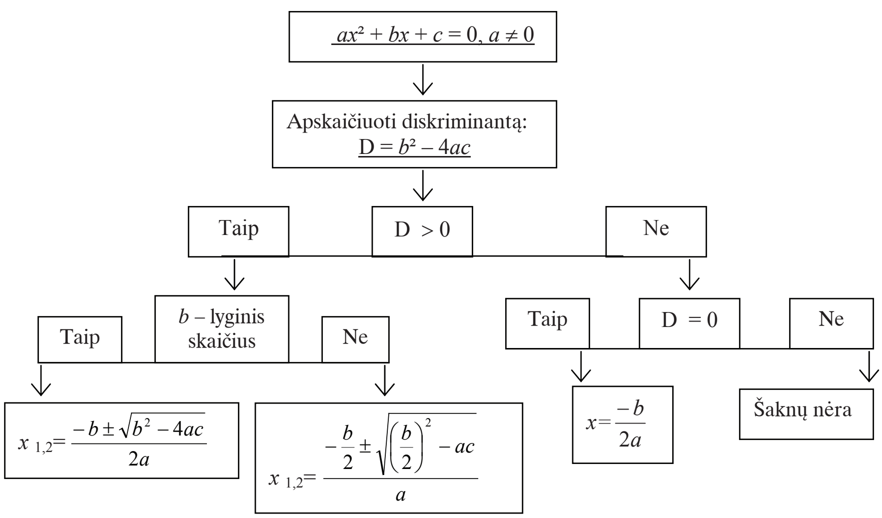
12. MOKINIŲ MOKYMAS KURTI ALGORITMUS

Mokykliniame matematikos kurse yra mokoma daugelio algoritmų tam tikrų klasių standartiniams uždaviniams spręsti. Mokant jų, reikia stengtis, kad visi mokiniai įvaldytų tuos algoritmus. To galima pasiekti įvairiais būdais. Efektyviausias iš jų – mokinių mokymas atrasti būtinus algoritmus, pedagoginių situacijų, stimuliuojančių šį atradimą, sudarymas.

Pirmiausia pats mokytojas turi gerai išsiaiškinti, kokios uždavinių klasės yra tam tikroje temoje. Pvz., temoje „Kvadratinės lygtys“ tos klasės bus tokios: 1) grafinis kvadratinių lygčių sprendimas; 2) kvadratinių lygčių sprendimas išskiriant dvinario kvadratą; 3) kvadratinių lygčių sprendimas pritaikant šaknų radimo formulę; 4) kvadratinės lygties šaknų ženklų nustatymas pagal Vieto teoremą; 5) kvadratinės lygties sudarymas pagal duotąsias šaknis; 6) kvadratinio trinario skaidymas dauginamaisiais; 7) funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafiko braižymas ir funkcijos tyrimas. Kiekvienai uždavinių klasei geriausia sukurti algoritmų schemas. Pirmajai uždavinių klasei schema bus tokia:



Bendrosios kvadratinės lygties sprendimo algoritmas atrodo taip:



Būtina išsiaiškinti, kad algoritmai turi savybes: 1) *masiškumas* (lot. „*massa*“ – luitas, gabalas; čia – didelio masto) – algoritmas turi būti pritaikomas bet kuriam uždaviniui iš tam tikros uždavinių klasės, kuriai tas algoritmas sudarytas, spręsti; 2) *determinuotumas* (lot. „*determinare*“ – apibrėžti) – kiekvienas bet kurio duotosios klasės uždavinio sprendimo žingsnis yra griežtai apibrėžtas algoritmo ir negalima laisvai pasirinkti eilinio veiksmo; 3) *rezultatyvumas* (lot. „*resultatum*“ – padarinys) – algoritmo taikymas bet kuriam duotosios klasės uždaviniui spręsti per baigtinį žingsnių skaičių visada užtikrina uždavinio išsprendimą.

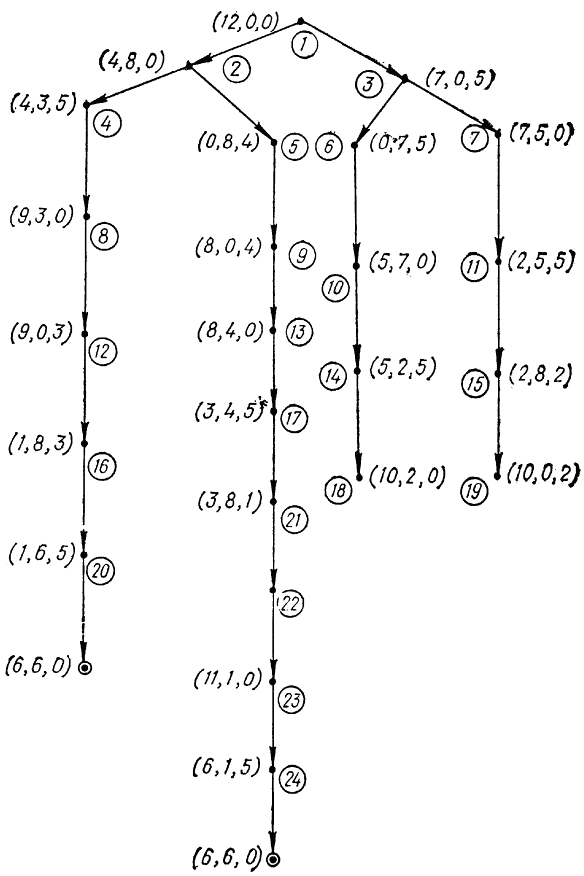
13. MOKINIŲ MOKYMAS IEŠKOTI UŽDAVINIŲ SPRENDIMO BŪDŲ

Dažnai, sprendžiant matematinius uždavinius, reikia gerokai pamąstyti, kaip rasti sprendimą. Matematikoje apskritai (o ir mokyklinėje matematikoje) pasitaiko nestandartinių uždavinių, kuriems nėra parengta bendrųjų sprendimo metodų (algoritmų). Pvz., įrodymo uždaviniai (iš esmės – tai teoremų įrodymas) nėra standartiniai. Nėra tokio algoritmo, kurio taikymas garantuotų bet kurios matematikos teoremos įrodymą. Kitas nestandartinių uždavinių pavyzdys – reiškinių tapatūs pertvarkiai.

Tada, kai nėra sprendimo algoritmo, būtina racionali jo paieška, o racionali paieška – esminis kūrybinio mąstymo elementas. Paieškos procese mąstymas juda į priekį bandymų ir klaidų keliu.

Uždavinio sprendimo procesas susideda iš dviejų dalių: uždavinio įsivaizdavimo ir jo sprendimo paieškos. Aptarsime įsivaizdavimą būsenų erdvėje. Pvz., reikia išspręsti uždavinį: „12 *l* talpos bidonas yra pilnas pieno. Būtina padalyti pieną pusiau. Kaip tai padaryti, jei turime 5 *l* ir 8 *l* talpos bidonus?“ [123]. Būsena čia laikysime pieno kiekį kiekviename bidone. Uždavinio sprendimo procese mes paprastai susiduriame ne su konkrečiomis būsenomis, bet su jų aprašymais. Aprašymo pasirinkimas yra svarbus įsivaizdavimo būsenų erdvėje etapas – čia iš esmės susiduriame su matematiniu empirinės medžiagos aprašymu. Šiame uždavinyje būsenas aprašyti patogu skaičių trejetais. Pradinė būsena bus (12, 0, 0), o galutinė, siekiamoji būsena – (6, 6, 0). Uždavinio sprendimas – pradinės būsenos pertvarkymas į siekiamąją. Antras įsivaizdavimo būsenų erdvėje elementas yra operatorius, kuris vieną būseną pakeičia kita – mūsų atveju tai perpylimas iš vieno bidono į kitą. Taigi uždavinio sprendimas yra seka operatorių, pakeičiančių pradinę būseną siekiamąja. Kad gerai įsivaizduotume uždavinį būsenų erdvėje, būtina pasirinkti: a) būsenų aprašymo formą ir, iš dalies, pradinės būsenos aprašymą; b) operatorių ir jų poveikių būsenų aprašymams aibę; c) siekiamosios būsenos aprašymą (ar bent numatyti jos savybes). Būsenų erdvę naudinga pavaizduoti orientuotu *grafu* (gr. „*graphō*“ – rašau; taškų, sujungtų atkarpomis, sistema), kurio viršūnės vaizduoja būsenas (ar jų aprašymus), kryptinės strėlės – operatorius.

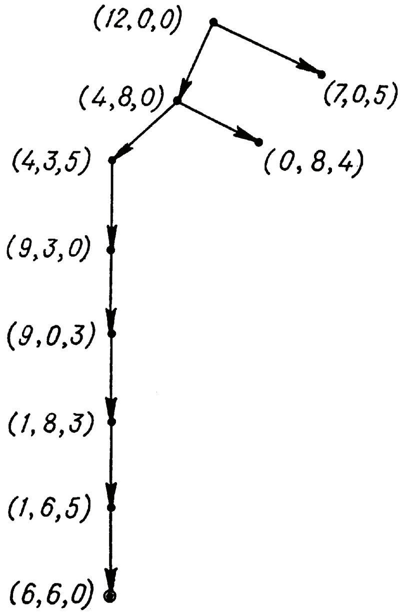
Grafo viršūnę, kuri vaizduoja pradinės būsenos aprašymą, vadinsime pradine viršūne, o viršūnę, kuri vaizduoja siekiamąją būseną – siekiamąja viršūne. Visų leidžiamų operatorių taikymas konkrečiai viršūnei, kurio rezultatas - visų tiesiogiai paskesnių viršūnių gavimas, vadinamas viršūnės atskleidimu. Tas atskleidimo procesas tęsiamas iki to laiko, kol gausime siekiamąją viršūnę. Bandymai veda prie tam tikros grafo formos – *medžio*. 32 pav. pavaizduotas medis – mūsų uždavinio sprendimo procesas – turi 4 galines viršūnes.



32 pav.

Dvi iš jų siekiamosios, dvi – ne. Jei viršūnės atskleidžiamos ta tvarka, kokia jos gimsta, turime *išsamią peržiūrą. Šis* metodas – „aklos“ peržiūros metodas. Todėl visada reikia stengtis iš uždavinių sąlygų išgauti tam tikrą *euristinę informaciją*, liečiančią konkretų nestandartinį uždavinį, leidžiančią stumtelėti paiešką į tikslo pusę, išaiškinti perspektyvesnes grafo viršūnes, kurias atskleisti reikia pirmiausia. Toks metodas, kai atsižvelgiama į euristinę informaciją, esančią uždavinio sąlygoje, vadiname *sutvarkyta* arba *euristine paieška (peržiūra)*. Aukščiau pateiktame uždavinyje priešpaskutinė grafo viršūnė turi atvesti prie trejetų (1, 6, 5) arba (6, 1, 5). Todėl, atliekant operacijas (perpylimą), perspektyvesnėmis laikysime tas, kuriose viena iš trejeto koordinačių artės prie 1. Ši paieškos kryptis ir bus perspektyviausia (33 pav.).

Kitas uždavinys: „Įrodyti tapatybę (1 + sin 2α) : (cos α + sin α) = 1“. Jo sprendimą galima pavaizduoti grafu (34 pav.). Šiame grafe irgi pavaizduota būsenų erdvė. Aišku, tas, kuris ieško sprendimo, iš anksto nežino šios erdvės. Tačiau mokytojas



33 pav.

turi įsivaizduoti ją. Tai padeda jam nukreipti mokinių paieškas trumpiausiu keliu. Spręsdami panašius uždavinius, daugelis mokinių atlieka akląją paiešką, keldami sau klausimą: „Ką galima padaryti?“, o turėtų klausti: „Ką reikia daryti?“. Gavę naują reiškinį, jie vėl kartoja tą patį klausimą, ir t. t. Taip mokiniai arba pasiekia tikslą ilgesniais, neracionaliais keliais, arba visai jo nepasiekia. Grafe parodytas trumpiausias kelias, pažymėtas storiausiomis rodyklėmis.

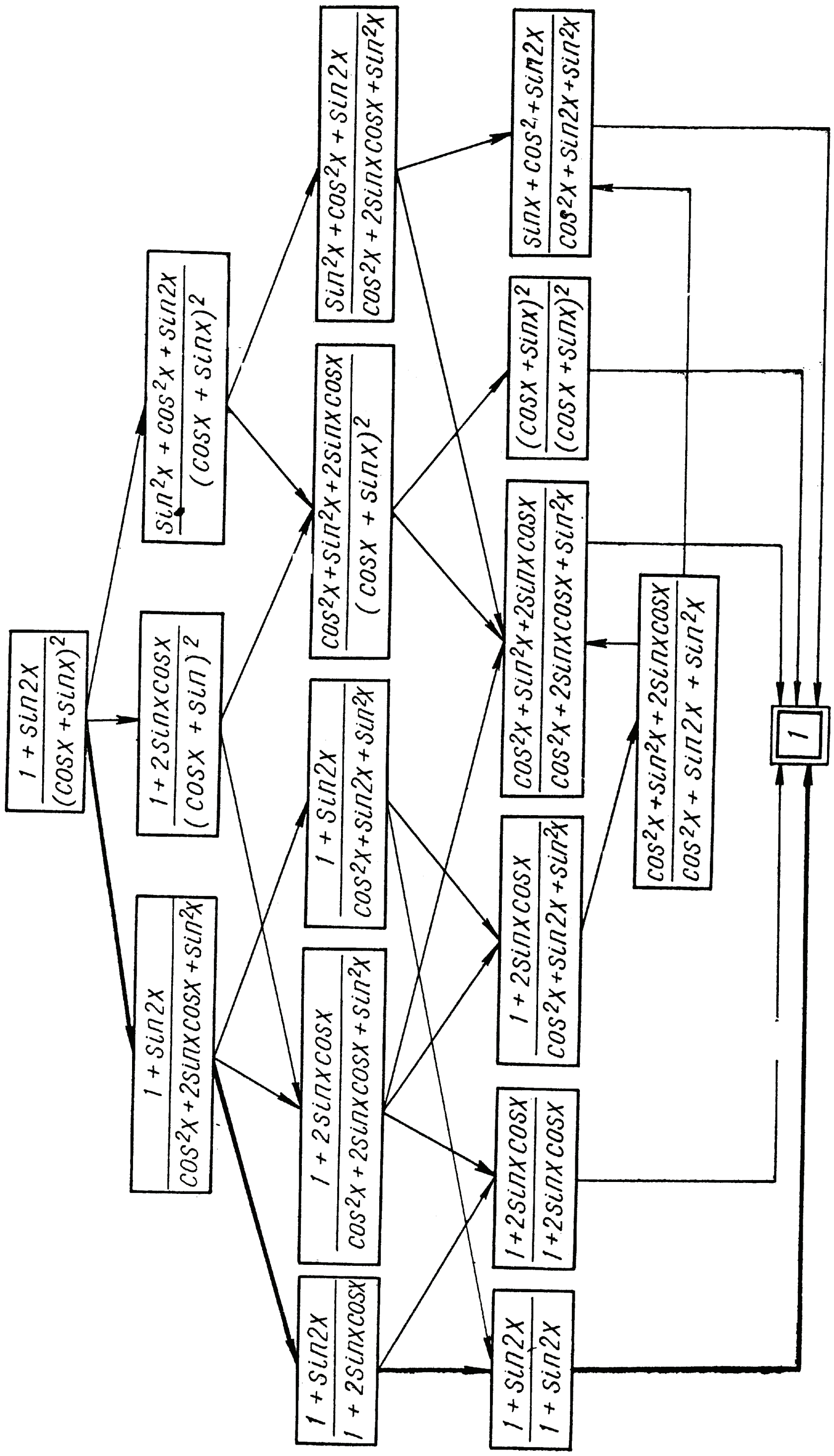
Bendras požiūris į uždavinių sprendimą yra pagrįstas *uždavinio pakeitimu* jau žinomų uždavinių kombinacijomis. Šis požiūris padeda išspręsti labai didelį skaičių uždavinių bei įrodyti daug teoremų. Tokio požiūrio idėja analogiška aritmetinių uždavinių sprendimo analizei, kai pradedama nuo ieškomų dydžių ir einama prie duotųjų. Tai leidžia bet kurį išsprendžiamą aritmetinį uždavinį suskaidyti į aibę paprastųjų aritmetinių uždavinių. Panašiai – ir sprendžiant geometrinę teoremą (įrodymo uždavinį).

14. MOKINIŲ MATEMATINIŲ ŽINIŲ ĮSISAVINIMO LYGIO NAGRINĖJIMAS

Lygis nustatomas naudojant įvairiausias grįžtamojo ryšio priemones. Dabar lygiai nustatomi pagal *išsilavinimo standartus* (angl. „*standard*“ – norma, pavyzdys).

Kad galėtume ištirti mokinių matematinių žinių įsisavinimo lygį, pirmiausia būtina apibrėžta koncepcija, kuri gali būti išreikšta atitinkamu matematinių žinių įsisavinimo modeliu. Tegu tą modelį sudaro trys aibės X, Y, Z ir trinaris santykis P(x, y, z). X – tikrinamų mokinių, Y – sąvokų, sudarančių tikrinamų žinių turinį, Z – įsisavinimo lygių aibės.

P(x, y, z), kur $x \in$ X, $y \in$ Y, $z \in$ Z, reiškia santykį „mokinys x įsisavino medžiagą y lygiu z“. Aišku, aibės X ir Y kinta, stabilesnė yra aibė Z. Tegul ją sudaro trys lygiai: A – atgaminimas, B – supratimas, C – perkėlimas. Pavadinimai – sąlyginiai. Sąlygiškumas pasireiškia tuo, kad lygis A gali turėti lygio B elementų, o lygis B – lygio C elementų. Realiai grynu pavidalu šie lygiai pasitaiko retai, tačiau lygį galime atpažinti pagal tam tikrus vyraujančius jo elementus. Trumpai jie apibūdinami tokiu būdu.



$\frac{1+\sin 2x}{(\cos x+\sin x)^2}$
$\frac{1+2\sin x\cos x}{(\cos x+\sin)^2}$
$\frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}$
$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin 2x}{(\cos x+\sin x)^2}$
$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}{(\cos x+\sin x)^2}$
$\frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x+\sin 2x+\sin^2 x}$
$\frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}$
$\frac{1+\sin 2x}{1+2\sin x\cos x}$
$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin 2x}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}$
$\frac{\sin x+\cos^2+\sin 2x}{\cos^2 x+\sin 2x+\sin^2 x}$
$\frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)^2}$
$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}$
$\frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sin 2x+\sin^2 x}$
$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sin 2x+\sin^2 x}$
$\frac{1+2\sin x\cos x}{1+2\sin x\cos x}$
$\frac{1+\sin 2x}{1+\sin 2x}$
1

34 pav.

A – *reprodukcija (atgaminimas)*. Šis lygis pasižymi tuo, kad jį pasiekęs mokinys turi paprasčiausių matematinių žinių, žino būtinus terminus, moka pagrindinių standartinių uždavinių klasių sprendimo algoritmus.

B – *supratimas*. Jam būdinga sąvokų ir ryšių tarp jų, matematinių struktūrų žinojimas, mokėjimas nustatyti, kokios sąvokos ar struktūros buvo būtinos aprašyti konkrečioms situacijoms, artimoms toms, kuriose šios sąvokos ar struktūros buvo nagrinėjamos (iš dalies – gyvenimiškų situacijų pertvarkymas į matematines ir jų pagrindu gautų uždavinių išsprendimas), mokėjimas apibendrinti ir konkretizuoti, stebėti įrodymus. Įvertinant supratimo lygio sudėtingumą, kai kuriuose modeliuose galimi du supratimo lygiai: *vietinis* ir *struktūrinis*.

C – *perkėlimas*, jo pagrindinis parametras – mokėjimas perkelti turimas žinias į naujas, iš esmės besiskiriančias nuo išnagrinėtųjų, situacijas ir uždavinius, pertvarkyti savo žinias matematiniam panašių situacijų aprašymui ir nestandartinių uždavinių sprendimui. Todėl čia reikia mokėti analizuoti sudėtingas situacijas ir uždavinius, konstruoti ir kritikuoti įrodymus aukštesniu negu ankstesnis lygiu, būtina mokėti realizuoti, taip pat įvertinti apibendrinimus.

Lygiams nustatyti plačiai naudojami tam sukurti specialūs *testai* (angl. „*test*“ – bandymas, mėginimas).

A lygio testų – užduočių pavyzdžiai:

1) Kokios eilutės proporcingos pirmajai eilutei?

1.	2	3	5	7	11
2.	4	6	10	11	12
3.	6	9	15	21	33
4.	8	12	20	28	30
5.	10	15	25	29	55
6.	12	18	30	42	66
7.	14	21	36	49	77
8.	100	150	250	350	550

2) Kam lygi reiškinio $\frac{x^2 - x}{x}$ reikšmė, kai $x = 0$?

a) 0. b) 1. c) Reiškinys neturi prasmės. d) Bet kokiam skaičiui.

B lygio testų pavyzdžiai:

1) Duota trupmena $\frac{(10x - 2x^2)(x^2 - 4)}{x^2 - 5x}$. Nurodyti tas kintamojo x reikšmes, kurioms esant ši trupmena lygi nuliui.

a) -2. b) -0,5. c) 0. d) 2. e) 0,5. f) 4. g) 5. h) 10.

2) Kurios nelygybės ekvivalenčios nelygybei $x > 3$?

a) $2x > 6$. b) $9 < 3x$. c) $x^2 > 3x$. d) $3 - x < 0$. e) $x + 5 > 8$. f) $12 < x + 9$. g) $x + 3 > 0$. h) $x - 3 > 0$.

C lygio testų pavyzdžiai:

1) Kurioms kintamojo x reikšmėms esant teisinga lygybė $\frac{|x+9|}{x+9} = -1$?

a) $x \leq 9$. b) $x > 9$. c) $x < -9$. d) $x > -9$. e) $-9 < x < 9$. f) $x \geq 9$.

2) Turime funkciją $y = \frac{2x-1}{3-4x}$. Raskite atvirkštinės funkcijos apibrėžimo sritį.

a) $]-\infty; ½[\cup]½; +\infty[$. b) $]-\infty; -^1/_3[\cup]-^1/_3; +\infty[$. c) $]-\infty; ¾[\cup]¾; +\infty[$.
d) $]-\infty; -½[\cup]-½; +\infty[$. e) $]-\infty; +\infty[$.

15. GENETINIS-ISTORINIS UŽDAVINIŲ SPRENDIMO MOKYMO METODAS

Šis metodas pasižymi tuo, kad, mokant uždavinių sprendimo, plačiai naudojamasi praeities matematikų darbais, sprendžiami jų sudaryti ar mėgti uždaviniai. Aišku, trumpai pakomentuojamos jų biografijos, mokiniai sudominami, skatinami pasiskaityti papildomos literatūros, neapsiriboti vien vadovėlių medžiaga.

V. Matiuchinas savo knygoje „Etiudai apie matematikus“ [94] pateikė įdomių istorinių uždavinių. Juos mokytojas gali sėkmingai panaudoti, taip įgyvendindamas genetinį matematikos mokymo metodą. Rašydamas apie senovės graikų matematiką Pitagorą, V. Matiuchinas pabrėžė: „Pats paslaptingiausias skaičius pitagorininkams buvo 36. Juos stebino, kad šiuo skaičiumi galima išreikšti trijų pirmų natūraliųjų skaičių kubų sumą, užrašyti pirmų keturių lyginių ir keturių nelyginių skaičių sumą.

Į klausimą, kas yra draugas, Pitagoras atsakė: „Tas pats, kas yra skaičiai 220 ir 284, pasižymintys tokia savybe, jog vieno jų daliklių suma (be pačių skaičių) yra lygi kitam (tokie skaičiai vadinami draugiškaisiais)“ [94, p. 8]. Mokytojas gali pasiūlyti mokiniams visa tai patikrinti.

Įdomūs ir kiti Pitagoro teiginiai apie skaičius: „1. Bet kuri iš eilės einančių nelyginių skaičių suma, pradedant vienetu, yra pilnasis kvadratas. 2. Kiekvienas nelyginis skaičius, išskyrus vienetą, yra dviejų kvadratų skirtumas“ [94, p. 9]. Mokiniai visa tai irgi gali patikrinti.

Mokiniams galima pasiūlyti išspręsti Muchamedo ben Musos al Chorezmio, IX a. uzbekų matematiko, astronomo ir geografo suformuluotą uždavinį: „Į lygiašonį trikampį, kurio šoninė kraštinė 10, o pagrindas 12, įbrėžti kvadratą“ [94, p. 16]. Mokiniams bus įdomi užduotis, suformuluota persų poeto, filosofo, astronomo ir matematiko Omaro Gijasedino Abu‘l Frachto ibn Ibrahimo Chajamo (1048 – apie 1131): „Išspręsti lygtį: $^1/_{x^2} + {}^2/_x = 1 + ¼$“[94, p. 17]. Įdomūs bus mokiniams ir italų matematiko Leonardo Fibonačio (*Fibonacci*, apie 1170 – po 1128) uždaviniai: „1. Kažkas kažkur patupdė triušių porą ir apstatė iš visų pusių sienomis, kad sužinotų, kiek porų triušių gims per metus, jei triušių pora paprastai per mėnesį susilaukia kitos poros palikuonių, o gimdyti triušiai gali būdami dviejų mėnesių. 2. Vienas sako kitam: „Duok man 7 dinarus, ir aš būsiu 5 kartus turtingesnis už tave“. O kitas atsako: „Duok man 5 dinarus, ir aš būsiu 7 kartus turtingesnis už tave“. Kiek pinigų turi kiekvienas? 3. Vienas žmogus nupirko 30 paukščių už 30 monetų. Iš visų šių paukščių už kiekvienus 3 žvirblius sumokėta viena moneta, už kiekvienus 2 fazanus – taip pat viena moneta ir galiausiai už kiekvieną balandį po dvi monetas. Kiek buvo kiekvienos rūšies paukščių? 4. Rasti skaičių, kurio $^{19}/_{20}$ lygu to skaičiaus kvadratui. 5. Du bokštai, kurio vieno aukštis 40 pėdų, o kito – 30 pėdų, nutolę vienas nuo kito per 50 pėdų. Nuo jų vienu metu pakyla du paukšteliai ir skrenda prie šulinio, esančio tarp bokštų. Skrisdami vienodu greičiu, paukšteliai prie šulinio atskrenda kartu. Raskite atstumą tarp šulinio ir bokštų“ [94, p. 17–18]. Mokiniams bus įdomi ir škotų matematiko Džono Neperio (*Napier*, 1550–1617) gudrybė: „Sykį Neperio namuose įvyko vagystė. Jis įtarė tarnus. Tada paskelbė, kad jo juodasis gaidys skleidžia juodąsias mintis. Kiekvienas iš tarnų turėjo įeiti į tamsų kambarį, kur tupėjo gaidys, ir paliesti jį rankomis. Buvo pasakyta, kad gaidys užgiedos, kai jį palies vagis. Nors gaidys ir neužgiedojo, vagis buvo atpažintas: Neperis iš anksto apibarstė gaidį pelenais ir vieno tarno švarūs pirštai įrodė jo kaltę“ [94, p. 23]. Aukščiau mes išsprendėme Simono Deni Puasono (*Poisson,* 1781–1840) uždavinį: „Žmogus turi 12 pintų vyno ir nori pusę padovanoti, tačiau neturi 6 pintų indo. Turi du indus: vieną 8, o kitą – 5 pintų. Kaip įpilti 6 pintas į 8 pintų indą?“ [94, p. 64].

16. MOKINIŲ GYVENIMIŠKOJO AKIRAČIO PLĖTIMAS SPRENDŽIANT UŽDAVINIUS

Matematinių tekstinių uždavinių (aritmetinių, algebrinių, kai kurių geometrinių) sąlygose mokiniams pasitaiko įvairių jų gyvenimiškąjį akiratį plečiančių sąvokų. Jose susiduriama su sąvokų apibendrinimu, įvairių santykių tarp jų nustatymu, klasifikacija ir pan. Vadovėlių ir uždavinynų autoriai, ypač žemesnėse klasėse, tokias sąvokas išskiria skirtingo šrifto, spalvų ar kt. akcentų naudojimu. Pvz., uždavinyje „Sode augo 8 *obelys* ir 5 *kriaušės*. Kiek *vaismedžių* augo sode?“ pirmosios dvi išskirtosios sąvokos įeina į trečiąją, o tarp jų yra nuošalės santykis. Tokių pavyzdžių teko stebėti ir Lietuvos mokyklų mokytojų pamokose. Antai Rokiškio Romuvos gimnazijos mokytoja Raimonda Rumšienė II klasėje su mokiniais sprendė uždavinį: „Šv. Kalėdų ir Naujųjų metų proga mama parašė 12, tėtis 10, sūnus 7 ir dukra 6 sveikinimus“. Sąlyga buvo sudaryta pagal plakatėlį. Uždavinio klausimai buvo tokie: „1) Kiek sveikinimų parašė *šeimos vyrai*? ... *šeimos moterys*? ... *tėvai*? ... *vaikai*? ... *visa šeima*?“ Beje, daug tokio tipo uždavinių pradinukams savo vadovėliuose pateikia Danutė ir Arkadijus Kiseliovai [77–80].

VIII. MATEMATINIS UGDYMAS

1. MATEMATINIO UGDYMO SĄVOKA

Ugdymas – tai mokymas, auklėjimas ir lavinimas. *Pedagogika* – tai mokslas apie ugdymą. Ją sudaro *mokymo teorija* (*didaktika*, gr. „*didaktikos*“ – pamokomas) ir *auklėjimo teorija* (*hodegetika*, gr. „*hodegeo*“ – vedu). Prie jų šliejasi *ugdymo psichologija* (gr. „*psychē*“ – siela, „*logos*“ – mokslas). Visa tai automatiškai tinka ir matematiniam ugdymui.

2. MATEMATIKOS DIDAKTIKA IR HODEGETIKA

2.1. Matematika kaip mokslas ir mokomasis dalykas

2.1.1. Matematika kaip mokslas

Matematika abstrahuojasi nuo medžiaginės objektų ir jų santykių pusės. Visa matematikos raida sąlygiškai suskaidoma į 4 pagrindinius periodus, kiekvieno naujo periodo pradžia pasižymėjo ypač svarbiais matematikos mokslo laimėjimais, reiškusiais matematikos mokslo pakėlimą į naują kokybinę būklę: 1) **matematikos atsiradimo periodas** (nuo seniausių laikų iki VI–V a. pr. Kr.); 2) **elementariosios (pastoviųjų dydžių) matematikos periodas**, kurio pradžia – Euklido „Pradmenyse“ susisteminta geometrija kaip mokslas; šis periodas tęsėsi iki XVII a.; 3) **kintamųjų dydžių matematika** – klasikinės aukštosios matematikos (analizės) periodas; jis tęsėsi iki XIX a. pr., prasidėjo nykstamai mažėjančių dydžių analizės sukūrimu; 4) **kintamųjų santykių matematika** – šiuolaikinės matematikos periodas; jo pradžia – rusų matematiko N. Lobačevskio ir vengrų matematiko Janošo Bojajaus (*Bolyai*, 1802–1860) darbai – neeuklidinės geometrijos sukūrimas.

Pats matematikos pavadinimas kilo iš graikiško žodžio „*mathema*“ – pažinimas, mokslas. Apžvelgsime aukščiau išskirtus 4 pagrindinius matematikos vystymosi periodus.

1) **Matematikos atsiradimo periodas.** Jis siejasi su praktiniais skaičiavimais ir matavimais, su skaičiaus ir figūros sąvokų formavimu. Šiame etape atsirado aritmetika ir geometrija, kaip rinkiniai empirinių taisyklių, taikomų praktiniams uždaviniams spręsti. To laikotarpio matematiniuose traktatuose pagrindiniai nurodymai skamba taip: „Daryk taip, kaip daroma, o daroma taip ...“. Pirmuosius matematikos žingsnius diktavo tiesioginiai gyvenimo praktikos poreikiai. Vėliau, besivystant astronomijai, mechanikai, fizikai, technikai, tarp tų mokslų ir matematikos nusistovėjo glaudus ir

be galo produktyvus bendradarbiavimas. Matematika giliau plėtojo savo metodus, plačiausiai pritaikomus kitiems mokslams, o šie savo ruožtu kėlė naujas matematines problemas, kurios dažnai iš esmės stūmė matematiką pirmyn.

2) **Pastoviųjų dydžių matematika.** Ji formavosi nuo VI–V a. pr. Kr. Šiame etape jau susiformavo matematikos, kaip mokslinio dalyko suvokimas, dalyko, turinčio savąjį tyrimo objektą (skaičius ir figūra) ir savuosius tyrimo metodus. To meto matematiką Aristotelis apibrėžia kaip mokslą apie kiekybę. Šiame etape gimė dedukcinis metodas, jį savo darbuose naudojo Euklidas, Archimedas, Apolonijas Pergietis (*Apollōnios Pergaios*, apie 262 – apie 190 pr. Kr.). Šiame etape pradeda vystytis naujas matematinis dalykas – algebra, pradedama kurti jos simbolika. Matematikos tyrimo objektas plečiasi. Šis etapas baigėsi XVI a. pab.

3) **Kintamųjų dydžių matematika** (XVII a. – XIX a. vid.). Toliau plečiasi matematikos tyrimo objektas. Matematikoje įsigali funkcijos idėja ir su ja susijusios tolydumo bei judėjimo idėjos. Susiformuoja matematinė analizė – galingas gamtos pažinimo instrumentas. Analizinė geometrija susieja geometriją, algebrą ir analizę. Aksiominis metodas akcentuoja loginį matematikos pagrindimą, tai įgalino tirti matematikos prigimtį.

4) **Kintamųjų santykių matematika** (prasideda nuo XIX a. vid.). Ji pasižymi išaugusiu abstrakčių matematinių darinių ir modeliavimo metodo vaidmeniu. Ši matematika atsirado dėl to, kad klasikinė matematika pasirodė esanti per siaura išsivysčiusio mokslo poreikiams patenkinti. Šiame etape matematika itin šakojosi. Giliai išvystomas aksiominis metodas, kuris suformavo naują pamatinę matematinės struktūros sąvoką. Ši sąvoka leido surasti vienovę daugybėje matematinių faktų ir metodų, iš pirmo žvilgsnio labai tolimų vienas kitam. XX a. palaipsniui buvo įsisąmoninta, kad matematikoje visiškai įmanoma ir praktiškai naudinga svarstyti apie objektus, kurie neturi realiai jutimiškai suvokiamos interpretacijos (lot. „*interpretatio*“ – aiškinimas). Matematikos tyrimo objektu tampa operacijos ir santykiai, apibrėžti bet kurios kilmės objektų aibėse, kurie, atsižvelgiant į juos valdančią aksiomų sistemą, formuoja įvairias matematines struktūras. Įvairūs matematikos skyriai, įvairūs dalykai tapo šių struktūrų modeliais. Taigi matematika tapo mokslu apie matematines struktūras ir jų modelius.

Matematikos abstrahavimas nuo konkrečių objektų ypatybių ir turinio visiškai nereiškia jos atplėšimo nuo realios tikrovės. Abstrahavimas nuo konkretaus turinio pateikia daugybę abstrakčių struktūrų, leidžiančių nagrinėti pačius įvairiausius realios tikrovės konkrečius reiškinius. Taigi matematika – ne aibė faktų, išdėstytų teoremomis, formulėmis ir kt. teiginiais, bet pirmiausia – arsenalas (it. „*arsenale*“, arab. „*dār-as-sinā'a*“ – dirbtuvė), kalba, kuria aprašomos įvairiausios mokslo ir praktinės veiklos sritys.

Naujajam geometrijos vystymuisi, kurio pradžia – N. Lobačevskio ir J. Bojajaus darbai, yra būdingos dvi aplinkybės.

1. Anksčiau geometrija nagrinėjo tik realaus pasaulio erdvines formas bei santykius, o dabar – daugelį kitų formų bei santykių, tik panašių į erdvinius, todėl tai leidžia panaudoti geometrinius metodus. Dėl to „erdvės“ terminas įgijo matematikoje naują, platesnę ir labiau specialią prasmę. Kartu patys geometrijos metodai tapo turtingesni, įvairesni. Jie padeda ir toliau suprasti mus supančią fizinę erdvę, nuo kurios buvo abstrahuota pradinė euklidinė geometrija.

2. Atsirado naujas požiūris į pačias tiriamas geometrinių figūrų savybes, suformuluotas F. Kleino įžymiojoje Erlangeno programoje. F. Kleinas geometriją tyrė kaip tam tikros pertvarkų grupės *invariantų* (lot. „*invarians*“ – nesikeičiantis) teoriją. Iš čia išplaukia galimybė egzistuoti skirtingoms geometrijoms, atitinkančioms skirtingas pertvarkų grupes.

Geometrijos vystymasis įvairiomis kryptimis tęsiasi, ir jos tyrimo objektu tampa vis naujos ir naujos „erdvės“: Lobačevskio, projektyvinė, euklidinė, Rymano[**], topologinė (gr. „*topos*“ – vieta, vietovė, „*logos*“ – mokslas; topologija – matematikos šaka, tirianti bendriausias erdvių ir geometrinių figūrų savybes, kurių nepakeičia tolydžiosios transformacijos), ir t. t. Šios teorijos taikomos tiek pačioje matematikoje, tiek fizikoje ir mechanikoje, ypač ryškiai – reliatyvumo (lot. „*relativus*“ – santykinis, priklausomas nuo ko nors) teorijoje.

Sparčiai vystosi ir algebra. Prasidėjusi nuo aritmetinių operacijų tyrimo skaičių aibėse, šiuolaikinė algebra, išsaugojusi šį pagrindą, perėjo prie tyrimo operacijų, tik savo formaliosiomis savybėmis sutampančių su įprastomis aritmetinėmis operacijomis, be to, aibėse, kurių elementai nebūtinai yra skaičiai, bet įvairios prigimties objektai. Šiuolaikinės algebros sąvokos, metodai ir rezultatai plačiai ir esmingai taikomi analizėje, geometrijoje, fizikoje, kristalografijoje ir t. t.

Esminiai pokyčiai įvyko matematinėje analizėje. Buvo patikslinti jos pagrindai, pvz., sukurta griežta realiųjų skaičių teorija, patikslintos funkcijos, ribos, integralo sąvokos. Šis patikslinimas įvyko XIX a. II pusėje (panašiai, kaip ir geometrijos, ir algebros vystymasis) ir buvo atliktas vokiečių matematikų Karlo Teodoro Vilhelmo Vejerštaso (*Weierstrass*, 1815–1897). Richardo Julijaus Vilhelmo Dėdekindo (*Dedekind,* 1831 – 1916) ir Georgo Kantoro (*Cantor*, 1845–1918). Pastarasis padėjo aibių teorijos pagrindus, kurie vėliau tapo vienu iš bendrųjų šiuolaikinės matematikos pagrindų. Iš matematinės analizės buvo išskirtos ypatingos sritys: realaus ir kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos, konstruktyvinė funkcijų teorija, kokybinė diferencialinių ir integralinių lygčių teorijos ir t. t. Matematinės analizės ir matematinės fizikos srityje, jas susiejus su naujomis geometrijos ir algebros idėjomis, atsirado nauja plati sritis – funkcinė analizė.

Pirmosios neeuklidinės geometrijos sistemos sukūrimas paskatino gilius tyrimus matematikos pagrindų srityje. Šių tyrimų objektas – matematinių teorijų pagrindi-

* Georgas Frydrichas Bernhardas Rymanas (*Riemann*, 1826–1866) – vokiečių matematikas

mas aksiominiu metodu. Taip atsirado nauja mokslo sritis, kurią D. Hilbertas pavadino metamatematika arba įrodymų teorija, nagrinėjanti matematinių teorijų kūrimą. Matematikos pagrindų tyrimo problemos tapo stimulu greitam matematinės logikos vystymuisi. Pastarosios pradmenys buvo suformuluoti tik XIX a. viduryje, nors idėją apie logikos matematizavimo tikslingumą ir galimybę dar XVII a. iškėlė Gotfrydas Vilhelmas Leibnicas (*Leibnitz,* 1646–1716).

Visada techninis skaičiavimo priemonių lygis darė esminį poveikį patiems matematikos metodams. Tačiau iki XX a. 4-jo dešimtmečio šios priemonės buvo gana riboto pajėgumo: jos leisdavo greičiau ar lėčiau atlikti tam tikras operacijas. Tačiau šiuolaikinių mokslo ir technikos uždavinių sprendimas reikalauja milžiniško skaičiaus operacijų, atliekamų pagal sudėtingas programas. Todėl elektroninė skaičiavimo mašina (ESM), sukurta XX a. 4–5 dešimtmečiuose, leidžianti tai atlikti, ėmė užkariauti iš esmės visas gyvenimo sritis. ESM gali spręsti ne tik tradicinius matematinius, bet ir platesnės klasės uždavinius, iškylančius įvairiose žmogaus veikos srityse (technologinių procesų valdymas, teksto rinkimas, redagavimas, vertimas iš vienos kalbos į kitą ir t. t.), tokius uždavinius versdama matematiniais. Šios ESM galimybės tapo stimulu atsirasti ir vystytis kompleksinei mokslo sričiai, tiriančiai ryšių ir valdymo problemas – *kibernetikai* (gr. „*kybernētikē*“ – valdymo menas). Teorinėje kibernetikoje taikoma tikimybių teorija ir matematinė logika. Jos poreikiai pagimdė naujas matematikos šakas: žaidimų ir informacijos teorijas. ESM ir kibernetika prisidėjo prie to, kad matematikos sritys, nesusiję su matematine analize, siejamos terminu „baigtinė“ arba „diskreti“ (lot. „*diskretus*“ – atskiras) matematika, dabar tapo aktualesnės, labiau taikomos.

Kartu su matematikos šakų diferenciacija (lot. „*differentia*“ – skirtumas) vyko ir atvirkštinis jų jungimosi, integracijos (lot. „*integratio*“ – atnaujinimas) procesas. Jis ypač reiškėsi XIX a. pab. – XX a. pr., kada buvo parengti bendrieji loginiai šiuolaikinės matematikos pagrindai. Integruojančiomis tapo aibių teorijos idėjos. Skirtingos matematikos sritys, anksčiau, atrodytų, neturėję nieko bendro, buvo susietos tarpusavyje. Toks susiejimas iš dalies realizuojamas, kaip jau minėjome aukščiau, įžymių Prancūzijos matematikų grupės, pasivadinusios N. Burbaki pseudonimu. Šios sąsajos pagrindas - pamatinės struktūros: tvarkos, algebrinės ir topologinės, kurių kombinacijos ir yra bet kurios matematinės struktūros. Rusų akademikas Andrejus Kolmogorovas (1903–1987) trumpai nusakė, kas tai yra šiuolaikinė matematika: „A. Visos matematikos pagrindas yra grynoji aibių teorija. B. Specialūs matematikos skyriai tiria struktūras, priklausančias toms ar kitoms specialioms struktūrų rūšims. Kiekviena struktūrų rūšis apibrėžiama atitinkama aksiomų sistema. Matematika domisi tik tomis struktūrų savybėmis, kurios išplaukia iš priimtosios aksiomų sistemos, t. y. nagrinėja struktūras tiktai iki izomorfizmo“ [126, p. 12].

Struktūrų, kurias tiria šiuolaikinė matematika, rūšys gali gimti įvairios prigimties aibėse santykiais, skirtingais nuo kiekybinių, ir vesti į formas, skirtingas nuo erdvinių.

Figūros n-matėse, taip pat ir erdvėse, kai $n \to \infty$,– tai ne erdvinės formos įprastine prasme, o abstrakčios matematinės figūros. Tačiau minėtosios erdvės ir figūros turi realią prasmę ir atspindi abstrakčiu pavidalu įvairias tikrovės formas, panašias į erdvines.

Matematinės logikos tyrimų objektas – matematinių išvadų sandara, t. y. tiriama, kokius teiginius galima išvesti iš duotųjų prielaidų turimomis priemonėmis. Matematinė logika visiškai atsiriboja nuo konkretaus turinio ir todėl teiginius keičia formulėmis, o išvedimo taisykles – operavimo su šiomis formulėmis taisyklėmis.

Taigi matematika, kaip ir kiekvienas kitas mokslas, nuolat vystosi. Tai sąlygoja gyvenimiškieji ir vidiniai pačios matematikos poreikiai. Audringa matematikos raida (apie 50 naujų teiginių įrodoma kasdien) teigiamai veikia technikos, ekonomikos, vadybos ir kt. mokslų vystymąsi. Lietuvių kalba šiuo metu yra išleista knygų, populiariai supažindinančių su matematikos mokslo raida, žymiausiais matematikais [32, 94]. Mokytojas gali lengvai perskaityti jas pats ir rekomenduoti jas stipresniesiems mokiniams.

2.1.2. Matematikos mokymo tikslai. Matematikos didaktikos raida

Žmonių visuomenės vystymasis neįmanomas neperteikiant kiekvienai naujai kartai ankstesnių kartų sukaupto patyrimo ir žinių, susintetintų įvairiose mokslo srityse. Tai galioja ir matematikai. Jau dabar, nekalbant apie ateitį, atsižvelgiant į mokslo ir technikos, ekonomikos ir gamybos vystymosi tendencijas, yra sunku ir bus dar sunkiau surasti tokią žmogaus veiklos sritį, kurioje būtų galima apsieiti be tam tikro matematinio pasirengimo. Darbas darosi vis labiau kvalifikuotas, protinis, reikalaujantis nenutrūkstamos minties veiklos, sudėtingų procesų analizės, teisingų loginių išvadų. Visuomenei reikia ir ateityje dar labiau reikės žmonių, mokančių tiksliai, logiškai galvoti, turinčių gerų matematinių žinių, mokančių jas pritaikyti realiose gyvenimiškose situacijose. Tam reikia atrinkti tą matematikos žinių dalį, kuri idealiai – nedaugeliu klausimų duotų jaunajai kartai supratimą apie matematikos mokslą apskritai, padėtų įsisavinti matematinius metodus ir ugdytų matematinį mąstymą. Tad suprantama, kad matematika, kaip mokomasis dalykas, negali išlikti pastovi ir todėl nuolat kinta. Kitimą lemia keletas priežasčių. Išvardysime jas.

1. Mokymo tikslų išplėtimas ir naujų reikalavimų atsiradimas vykstant visuomenės raidai, kintant jos techniniams bei ekonominiams poreikiams. Tai veikia ne tik matematikos, kaip mokomojo dalyko turinį, bet ir jos įsisavinimo lygį.
2. Nenutrūkstama paties matematikos mokslo raida, naujų jo šakų atsiradimas verčia mokomąjį dalyką peržiūrėti, kai kurių temų ir skyrių atsisakyti.
3. Bendro moksleivių išsivystymo lygio kitimo kintant visuomenei tendencija, leidžianti kai kurias temas nagrinėti su jaunesniojo mokyklinio amžiaus mokiniais.

4. Pedagogikos mokslo, matematikos didaktikos vystymasis, gerosios pedagoginės patirties apibendrinimas ir įdiegimas į masinę mokyklą taip pat padidina mokinių mokymo prieinamumą, efektyvumą.

Antai per keletą pastarųjų dešimtmečių mokykloje atsisakyta eilės tipinių aritmetinių uždavinių sprendimo, sudėtingų skaičiavimo pratimų mokymo, nunyko trigonometrija kaip atskiras mokomasis dalykas, bet atsirado naujos idėjos, metodai ir skyriai: išvestinė, integralas, geometrinės transformacijos, vektoriai, algebros elementai aritmetikoje bei geometrijoje, ir t. t.

Mokomajame dalyke turi būti; a) pakankamai išsamiai pateikti šiuolaikinio mokslo pagrindai, be to, mokiniams prieinama forma; b) tarp skirtingų mokslo skyrių, pateiktų mokomajame dalyke, turi egzistuoti apibrėžta tarpusavio sąveika, užtikrinanti jų sisteminį mokymąsi.

Graikiškai „metodika“ (*methodikē*), „metodas“ (*methodos*) – kelias. Matematikos metodika (didaktika) – pedagogikos šaka, kuri tiria matematikos mokymo dėsningumus, esant tam tikram matematikos išsivystymo lygiui ir atsižvelgiant į mokymo tikslus, suformuluotus visuomenės. Didaktika privalo atsakyti į 3 pagrindinius klausimus: *kam, kaip* ir *ko mokyti*?

Matematikos didaktikos pradžia laikytinas šveicarų pedagogo Johano Henriko Pestalocio (*Pestallozzi*, 1746–1827) veikalas „Vaizdus mokymas apie skaičių“ (1803). Matematikos didaktika, turinti atskleisti matematikos mokymo proceso dėsningumus, patiria nemažų sunkumų. Pirmiausia jie yra susiję su tuo, kad būtina pašalinti atotrūkį tarp matematikos dalyko ir mokslo. Antra, matematikos didaktika yra pedagogikos, filosofijos, psichologijos, biologijos, kibernetikos ir meno sankirta.

2.1.3. Matematikos mokymo vidurinėje mokykloje tikslai

Jie yra skirstomi į 3 grupes: mokomieji, auklėjamieji ir lavinamieji.

Mokomieji tikslai. Juos realizuoja mokytojas, kuris: 1) perduoda mokiniams tam tikrą matematinių žinių sistemą, formuoja jų mokėjimus ir įgūdžius; 2) padeda jiems įvaldyti matematinius realios tikrovės pažinimo metodus; 3) išmoko mokinius žodinės ir rašytinės matematinės kalbos su visomis būdingomis jai savybėmis (paprastumas, aiškumas, pilnumas, lakoniškumas ir t. t.); 4) padeda mokiniams įvaldyti matematinių žinių minimumą, reikalingą tam, kad jie galėtų turimas žinias, mokėjimus bei įgūdžius taikyti aktyvioje pažintinėje veikloje mokymo ir mokymosi procese.

Auklėjamieji tikslai: 1) išvystyti nuolatinį interesą siekti matematinių žinių; 2) dorovinis ir estetinis auklėjimas (pagarbos darbui, pareigos, patriotizmo, grožio, matematinės kultūros ir kt. jausmų ugdymas).

Lavinamieji tikslai – matematinio mąstymo išvystymas; tai pasiekiama: 1) mokant gautas žinias pritaikyti paprasčiausiems gyvenimiškiems uždaviniams spręsti, taip pat ir tarpdalykinei integracijai (su fizika, chemija ir kt. dalykais) įgyvendinti; 2) formuojant mokėjimus naudotis matematiniais prietaisais bei instrumentais; 3) mokant savarankiškai įgyti žinias iš įvairių šaltinių (papildomos literatūros, žiniasklaidos, interneto).

2.1.4. Pasaulinis judėjimas už matematikos mokymo reformas praeityje ir dabar

Matematikos didaktikos kitimai gali būti vietiniai arba visuotiniai: iš programos išimamas vienas ar kitas klausimas, pakeičiami kai kurie terminai, įdiegiamas koks nors naujas mokymo būdas, į programą įvedami kai kurie nauji skyriai arba gali būti pakeistas pagrindinis mokymo turinys, įvedamos naujos mokymo formos ir metodai.

Tradicinė tarptautinė matematikos mokymo mokykloje sistema susiformavo XIX a. Ją nulėmė tai, kad daugelyje šalių buvo sukurti du mokyklų tipai: pradinė (liaudies) ir vidurinė (aukštesnioji, dažniausia skirta tik pasiturinčiųjų sluoksnių vaikams). Iš pradžių pradinis mokymas truko tik 3 metus, vėliau, vystantis valstybių ekonomikai ir augant jos poreikiams, įvairiose šalyse jo trukmė augo iki 4, 6 ar net 8 metų. O bendrasis vidurinis mokymas (su pradiniu) truko nuo 10 iki 13 metų.

Pradinis matematikos mokymas iš pradžių apsiribojo elementariu aritmetiniu raštingumu, po to palaipsniui buvo įvesti ir geometrijos, algebros, matematinės statistikos ir tikimybių teorijos pradmenys.

Vidurinėje mokykloje gana ilgą laiką izoliuotai vienas nuo kito buvo dėstomi šie dalykai: aritmetika, algebra, geometrija ir trigonometrija.

Pagrindinis mokymo pradinėje mokykloje būdas ilgą laiką buvo empirinis skaičiavimų taisyklių įvedimas ir tipinių aritmetinių uždavinių (kartais gana dirbtinių) sprendimas. Vidurinėje mokykloje formaliai buvo įvedama teorija, pateikiant matematinių sąvokų apibrėžimus, mokytojui pateikiant ir mokiniams išmokstant teoremų įrodymus, sprendžiant uždavinius (dažnai irgi gana dirbtinius). Tarp pradinio ir vidurinio mokymo susidarė savotiškas atotrūkis, pradinis mokymas laikytas išbaigta sistema ir nagrinėta perimamumo tarp pradinio ir vidurinio mokymo problema. Tokia sistema ėmė nebetenkinti visuomenės vystymosi poreikių. Visa tai lėmė tiek mokyklinio kurso skurdumas, atitrūkimas nuo gyvenimo, matematikos mokslo, tiek mokymo dogmatizmas, grindžiamas atmintimi, o ne mąstymu.

XIX a. pabaigoje kilo judėjimas už matematikos mokymo reformavimą. 1899 m. imtas leisti tarptautinis žurnalas „Matematinis švietimas“. 1905 m. Meranės mieste įvyko Vokietijos gamtininkų ir gydytojų draugijos suvažiavimas. Jo iniciatorius buvo garsusis vokiečių matematikas F. Kleinas. Suvažiavime buvo priimtas Vokietijos bendrojo lavinimo mokyklų matematikos programos projektas, dabar vadinamas Meranės programa. Pagal ją matematiką reikėjo dėstyti remiantis funkcijos sąvoka, kurią pirmiausia reikia įvesti į algebrą bei trigonometriją, taip pat išplėsti geometrijai, siejant pastarąją su algebra: daugianarius ir lygtis rekomenduota interpretuoti kaip funkcijas ir jas geometriškai vaizduoti; geometrinių figūrų plotus, kūnų tūrius, paviršius siūlyta interpretuoti kaip jų matmenų funkcijas. Meranės programoje buvo numatyta pradėti dėstyti analizinės geometrijos pradmenis, supažindinti su matematine analize – įvesti funkcijos išvestinės bei integralo sąvokas, jas analizuoti vidurinėje mokykloje. Beje, įvesti aukštosios matematikos pagrindus Vokietijos mokyklose mintis kilo dar 1816 m., tačiau to galutinai įgyvendinti nepavyko. 1834 m. buvo priimtas kompromisinis sprendimas – parengtos atskiros programos *klasikinėms* (lot. „*classicus*“ – pavyzdinis) ir *realinėms* (lot. „*realis*“ – daiktiškas, tikras) gimnazijoms. Tačiau stojant į aukštąsias mokyklas pirmenybė teikta klasikinių gimnazijų abiturientams. Tik 1900 m. visų abiturientų teisės buvo sulygintos. Meranės programa siekė ne tik mokymo turinio, bet ir dėstymo metodinių reformų: nereikalauti griežto matematinių teiginių pagrindimo žemesnėse klasėse, daugiau naudoti vaizdinių priemonių, ypač remtis grafiniu vaizdavimu, taip parengiant mokinius funkcijos sąvokai įvesti. Meranės programa imta realizuoti Vokietijoje. Tačiau šios programos idėjoms buvo pribrendusios ir kitų Vakarų Europos šalių, pirmiausia Prancūzijos, Austrijos, Italijos mokyklos [12]. Todėl 1908 m. IV tarptautiniame matematikų kongrese (Roma) buvo įkurta tarptautinė komisija matematikos mokymui reformuoti. Jos pirmininku vėl tapo F. Kleinas. Komisija parengė pagrindines reformos kryptis. Pradinėje mokykloje numatyta: a) sustiprinti geometrijos vaidmenį aritmetikos kurse; b) tekstinius uždavinius sieti su gyvenimu; c) padidinti vaizdumo vaidmenį mokant matematikos. Vidurinėje mokykloje numatyta: a) sustiprinti aritmetikos, algebros, geometrijos ir trigonometrijos tarpusavio ryšius, taip pat ryšius tarp matematikos ir fizikos; b) įvesti į mokyklinį kursą aukštosios matematikos pradmenis (matematinės analizės ir analizinės geometrijos); c) aritmetikos ir algebros kurse sustiprinti funkcijos, geometrijos kurse – judesio sąvokų vaidmenį; d) pakeisti uždavinių sprendimo mokymo metodiką, sustiprinant analizės ir sintezės vaidmenį; e) visame mokant matematikos plačiau taikyti euristinius metodus.

Tačiau daugelio šalių (tarp jų ir Rusijos imperijos) švietimo vadovybė į šiuos nutarimus dėmesio nekreipė, jų idėjas realizavo daugiausia pedagogai entuziastai. Trukdė ir pasauliniai karai. 1918 m. atgavusiai nepriklausomybę Lietuvai, nors ir iškilo dideli švietimo sistemos kūrimo sunkumai, tačiau jau pirmosiose pradinės mokyklos mokymo programose jau buvo atsižvelgta į daugelį Meranės programos rekomendacijų. Po 1928 m. į jas imta atsižvelgti ir aukštesniųjų klasių matematikos programose [12]. Tačiau matematika vystėsi ir kėlė naujus uždavinius ir iššūkius mokyklai. Apžvelgsime juos.

l. Matematiniai tyrimai plečiasi. Atskiros matematikos šakos darosi vis labiau specializuotos, vystosi autonomiškai, tarp jų atsiranda savotiškos sienos dėl simbolikos skirtingumo. Kilo klausimas: ar egzistuoja vienas matematikos mokslas ar keletas (nors ir giminingų tarp savęs) matematikos mokslų. Į šį klausimą atsakė, kaip jau minėta, prancūzų matematikų bendruomenės, pasivadinusios N. Burbaki slapyvardžiu ir pradėjusios veikti 1928–1930 m., darbai. Ši bendruomenė, beje, nuolat atsinaujina, nes visi jos nariai, sukakę 50 m., išeina į „atsargą“.

Burbaki bendruomenės darbai įrodė, kad matematika – vieningas mokslas, jos atskiros šakos, besivystančios autonomiškai, izoliuotai viena nuo kitos, yra vieno „organizmo“ dalys. Bendruomenės nariai iškėlė tikslą – suklasifikuoti visą matematiką struktūrų principu. Klasifikacijos pagrindas – aibės sąvoka ir aksiominio metodo taikymas. Buvo nustatytas labai nedidelis pagrindinių struktūrų skaičius: algebrinės, tvarkos ir topologinės. Jos ir sudarė visos matematikos pagrindą. Tapo dar opesnė matematikos mokslo ir matematikos – mokomojo dalyko vidurinėje mokykloje – atotrūkio problema, imta aktyviau ieškoti jos sprendimo būdų.

2. Burbaki bendruomenės darbai didelę įtaką turėjo ir šiuolaikinės pedagoginės psichologijos raidai. Susikūrė ištisa psichologų mokykla, kuriai vadovavo šveicarų pedagogas Žanas Pjažė (*Piaget*, 1896–1980), tirianti matematinio mąstymo psichologiją. Šių psichologų tyrimai parodė, kad mokinių matematinis mąstymas lavėja vystantis matematikos mokslui. Kaip ir matematikos moksle, taip ir matematiniame mąstyme yra išskirtos trys tos pačios pagrindinės struktūros. Mokydamasis matematikos, vaikas susipažįsta su ja, pereidamas nuo vienos struktūros prie kitos, pastaroji papildo pirmesnę ir susiderina su ja. Todėl kilo idėja, kad matematikos mokymo uždavinys turi būti šių matematinių struktūrų formavimas ir jų nagrinėjimas. Ši idėja buvo imta plačiai taikyti reformuojant Prancūzijos ir SSRS matematikos mokymą XX a. 6–8 dešimtmečiuose. Deja, masinis šios idėjos diegimas nebuvo itin efektyvus.

3. Pasaulio, Europos bei Rusijos pedagogai ir psichologai (A. Leontjevas, V. Davydovas ir kt.) įrodė, kad jaunesniojo mokyklinio amžiaus vaikų galimybės įsisavinti abstraktesnę medžiagą panaudojamos nepakankamai.

Bandymai realizuoti matematikos mokymo reformas eina dviem kryptimis. Aptarsime jas.

1. *Konkretus matematikos, kaip mokomojo dalyko, turinio keitimas*. Bandoma atsisakyti pagrindų, kuriais remiasi klasikinė mokyklinė matematika ir konstruoti matematiką, kaip mokomąjį dalyką, remiantis šiuolaikinės matematikos idėjomis ir iš esmės pakeičiant matematikos mokymo sistemą bei metodus mokykloje.

2. *Mokyklinio matematikos kurso palaipsnis modernizavimas*, įtraukiant į jį kai kurias naujas žinias iš šiuolaikinės matematikos bei išimant kai kurias praradusias savo reikšmę klasikinės matematikos žinias. Kartu stiprinami integraciniai ryšiai tarp atskirų matematikos šakų bei tarp jų ir realaus gyvenimo, atitinkamai keičiant mokymo metodus.

Esminės matematikos mokymo reformos pagrindinė idėja – *vieningas mokyklinės matematikos kursas, neskirstomas į atskirus mokomuosius dalykus*. Kraštutiniai reformatoriai pasisako už esminį tradicinio mokyklinio matematikos kurso pertvarkymą, sukuriant naują, gana bendrą kursą, netgi prarandant kai ką iš mokymo sistemingumo principo teikiamų teigiamybių.

Kartu siūloma keisti matematikos mokymo metodiką kiek galima individualizuojant mokymą. Akcentuojamas matematinių probleminių situacijų sudarymas ir nagrinėjimas. Situacijos turi būti pakankamai ryškios, vaizdžios, pasižyminčios savo emociniu poveikiu mokiniams, jiems prieinamos ir matematine prasme turiningos. Nagrinėdami situacijas, mokiniai per savo gebėjimus atranda jose paslėptus matematinius dėsningumus, nustato jų elementų tarpusavio ryšį, išsiaiškina juos valdančius bendruosius dėsnius – apibrėžtas matematines struktūras. Aišku, kad matematinių dalykų pobūdis nevaidina esminio vaidmens.

Toks matematikos mokymas gali padėti pasireikšti kiekvieno mokinio individualybei, taip pat pakankamai natūraliai atskleisti integracinius ryšius tarp vieno matematinio dalyko skyrių ar skirtingų matematinių dalykų. Tačiau kyla abejonių, ar galima remiantis tokiomis situacijomis suformuoti griežtai apibrėžtą matematinių žinių, mokėjimų ir įgūdžių sistemą, kurią būtina įsisavinti kiekvienam vidurinę mokyklą baigiančiam. Tačiau jei tokias idėjas realizuosime pakankamai atsargiai, bet nuosekliai, palaipsniui modernizuodami matematikos mokyklinį kursą, taip pat individualiai dirbdami su gabesniais mokiniais būreliuose, tai sėkmė gali būti užtikrinta.

Aukščiau minėta Ž. Pjažė mokykla papildė didaktinį aktyvaus mokymo principą, kurį pagrindė šiais teiginiais: a) mokinys turi būti nukreipiamas į savarankišką matematinių dėsningumų atradimą; b) atradimui turi padėti speciali didaktinė medžiaga; c) pažinimo procesas turi remtis ne vien regėjimo ir klausos pojūčiais, bet ir tiesioginių, aktyvių ir kryptingų veiksmų su didaktine medžiaga teikiamais pojūčiais.

Tai – tolesnis euristinio matematikos mokymo vystymas.

Kartu būtina pažymėti, kad rekomenduojant aktyvų darbą, paremtą vaiko konstrukcine (lot. „*constructio*“ – sustatymas, sandara) intuicija (lot. „*intuitio*“ – nuojauta), jos šalininkai nekreipia dėmesio į tai, kad kiekvienoje klasėje mokinių gebėjimai, bendro išsivystymo lygis yra skirtingi. Klasės mokinių sudėties heterogeniškumas (nevienodumas) kelia abejones universaliu minėto principo realizavimo efektyvumu, nes ne kiekvienas mokinys sugebės įsisavinti matematikos žinias tik jų atradimo būdu, be to, maždaug per vienodą laiko tarpą kiekvienai klasei. Nekelia abejonių tai, kad dalį žinių turi pateikti mokytojas. Taigi tokia darbo metodika, kai mokinys privalo viską atrasti pats, nėra universali. Beje, ir sukurti šią metodiką nėra lengva. Todėl teisingas metodikos pasirinkimas yra susijęs su organine pačių įvairiausių metodikų vienybe (indukcinės – vaizdinės, dedukcinės, euristinės ir t. t.).

Esant eksperimentinių vadovėlių įvairovei, kraštutinės reformos krypties šalininkai taip ir nesukūrė bendro mokyklinio matematikos kurso. Tai nėra atsitiktinis reiškinys. Atsisakyti iš karto visų tradicijų (ir naudingų, ir žalingų), sukauptų daugelio pedagogų kartų, nėra paprasta. Sukurti naują bendrą kursą reikia ir daugelio metų teorinių bei eksperimentinių tyrimų. Jie vyksta, juos organizuoja prie UNESCO (*United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization* – Jungtinių Tautų švietimo, mokslo ir kultūros organizacija) veikianti Tarptautinė matematikos mokymo tobulinimo komisija. Dar 1956 m. Ženevoje įvyko XIX konferencija švietimo klausimais, organizuota UNESCO. Joje dalyvavo 74 šalių atstovai. Vienas iš svarbių jos klausimų – matematinio švietimo reforma. Jos rekomendacijos matematikos mokymo srityje buvo tokios[132].

Matematikos mokymo tikslai

l. Per gana ilgą mokymosi vidurinėje mokykloje laikotarpį reikia siekti kuo geriau įgyvendinti matematikos mokymo lavinamuosius tikslus, susijusius su intelektinės veiklos ir charakterio formavimu. Šie tikslai pirmiausia yra loginio mąstymo procesų (svarstymų, analizės, abstrahavimo, schematizavimo, dedukcinio mąstymo, apibendrinimo, specializavimo, žinių taikymo, kritikos ir t. t.), stebėjimo dvasios, erdvinių ir kiekybinių vaizdinių, intuicijos, vaizduotės abstrakčiose srityse, dėmesio ir gebėjimo susikaupti, atkaklumo, įpročio tvarkingai dirbti, mokslinės dvasios (objektyvumo, intelektinės savigarbos, polinkio į tyrimus ir kt.) ugdymas.

2. Praktinės operacijos, prisitaikymas prie gamtinių sąlygų, būtinumas suprasti problemas, kurias iškelia technika, ekonomika, socialinis žmonių bendravimas, vis labiau reikalauja elementarių matematinių žinių (skaičiavimai, praktinė geometrija, geometriniai vaizdiniai, formulės, lygtys, funkcijos, lentelės, grafikai). Šios pagrindinės sąvokos ir priemonės taip pat yra labai svarbios vis platesniam įvairių profesijų žmonių ratui.

3. Matematika ir jai būdingas mąstymo stilius turi būti laikomi esminiu šiuolaikinio žmogaus bendrosios kultūros komponentu net ir tuo atveju, jei jis neužsiiminėja tiksliaisiais mokslais ar technika. Matematikos mokymas turi būti glaudžiai integruotas su kitų dalykų mokymu ir turi padėti mokiniams suprasti matematikos vaidmenį mokslinėje ir filosofinėje šiuolaikinio pasaulio koncepcijoje.

4. Pagrindinis sustiprinto matematikos mokymo realinio profilio gimnazijose tikslas – mokinių parengimas studijoms aukštosiose mokyklose (matematikos, kt. tiksliųjų mokslų, inžinerinių specialybių).

Metodai

1. Mokiniams duodamas metodines instrukcijas reikia pateikti patarimų bei pasiūlymų forma, taip siekiant suderinti mokymą tiek su pažinimo psichologijos ir matematikos didaktikos laimėjimais, tiek su pačios matematikos esme ir teiginiais.

2. Visos pedagogų pastangos turi būti skirtos tam, kad būtų skatinama mokinius aktyviai mokytis matematikos.

3. Būtina: a) sukelti ir palaikyti mokinių domėjimąsi tiek pačia matematika, tiek jos taikymu; b) stebėti mokinių matematinės minties tėkmę; c) pritaikyti mokymą prie individualių mokinių gebėjimų ir palaipsniui jį diferencijuoti pagal jų būsimos profesinės veiklos pobūdį.

4. Reikia: a) pereiti prie abstraktaus pradedant konkrečiu tiek dažnai, kiek tai yra galima, ypač jaunesniosiose klasėse, ir kiekvieną kartą, kada tai naudinga, imtis faktinio, vaizdaus eksperimentavimo, kad parengtume mokinius suformuluoti apibrėžimą, įrodyti teiginį; b) turėti omenyje, kad matematinis pažinimas atsiranda ir vystosi konkrečios veiklos interiorizacijos (lot. „ *interior*“ – vidinis) keliu (etapinis perėjimas nuo išorinės prie sąmoningos vidinės psichinės veiklos) ir operatorinių (lot. „*operator*“ – veikėjas) schemų sudarymo; c) atvejus, pasitaikančius konkrečioje situacijoje, panaudoti ne vien tik praktinės matematinės veiklos naudingumui pabrėžti, bet ir tam, kad motyvuotume tolesnį matematinės teorijos vystymą.

5. Svarbu: a) skatinti mokinius savarankiškai formuluoti idėjas, atskleisti matematinius santykius ir savybes, pradžioje gal ir ne visada labai tiksliai; b) užtikrinti sąvokų ir operatorinių procesų įsisavinimą dar iki formalaus jų apibendrinimo; c) automatizuoti įgūdžius tik tada, kai mokėjimai bus galutinai suformuoti.

6. Esminga: a) pirmiausia organizuoti eksperimentus su matematiniais objektais ir santykiais, o po to pereiti prie dedukcinių samprotavimų; b) palaipsniui plėsti dedukcinį matematikos pateikimą; c) išmokyti formuluoti uždavinius, surasti reikalingus duomenis, juos panaudoti bei įvertinti rezultatus; d) prieš teoremų įrodymus pratęsti euristinius tyrimus; e) supažindinti mokinius su hipotetinės-dedukcinės teorijos struktūra, kur, remiantis postulatų baze, įrodomos teoremos, naujos sąvokos įvedamos apibrėžiant jas; taip mokiniai bus parengti dedukciniam-loginiam matematikos mokymui.

7. Reikia: a) nagrinėti mokinių klaidas, kaip priemonę mokinių matematinio mąstymo procesui suprasti; b) pratinti mokinius atlikti savikontrolę ir taisyti savo klaidas; c) atskleisti mokiniams apytikslio skaičiavimo, į tiesą panašaus rezultato sąvokas; d) remtis svarstymais prieš mokantis ko nors mintinai; e) egzaminams pateikti užduotis, reikalaujančias daugiau matematinio kūrybiškumo negu gatavų žinių.

8. Svarbu: a) skatinti individualios minties raišką, nors kartais ir apytikslės, palaipsniui tobulinant ją; b) išaiškinti mokiniams aiškinimo tikslumo, griežtumo ir aiškumo reikšmę; c) skatinti asmeninę iniciatyvą tyrimuose, mokėjimą tai atlikti grupėje; d) skatinti kuo daugiau mokinių domėtis matematika, padėti vystytis jų gebėjimams, mokyti kaupti žinias organizuojant būrelių veiklą, paskaitas, matematines varžybas, mokiniams prieinamų matematinių leidinių skaitymą ir aptarimą.

9. Esminga: a) pabrėžti vidinę matematikos vienovę, nekurti „sienų“ tarp atskirų jos šakų ir stengtis palyginti įvairius atitinkamo klausimo sprendimo metodus; b) apžvelgti pagrindinius nagrinėjamų matematinių sąvokų ir teorijų raidos etapus.

10. Būtina: a) koordinuoti integracinius ryšius tarp matematikos ir ja besinaudojančių mokomųjų dalykų; b) panaudoti matematinį mąstymą kalbos tikslumui, aiškumui ir trumpumui užtikrinti; c) siekti, kad mokant matematikos būtų nuolat ieškoma kontaktų su realiu gyvenimu.

Tarptautinės konferencijos organizuojamos reguliariai (maždaug kas 4 metai), tačiau būtent mūsų aptartoji iš tiesų padėjo šiuolaikinio požiūrio į matematikos mokymą, matematinio švietimo modernizavimo pagrindus.

2.2. Matematinio švietimo modernizavimas

2.2.1. Judėjimas už matematinio švietimo modernizavimą

Modernizavimas (pranc. „*moderne*“ – naujas, šiuolaikinis) – šiuolaikinių idėjų, metodų, reikalavimų įvedimas į mokymo procesą. Matematikos mokymo modernizavimas buvo aptartas Tarptautinės matematinio švietimo komisijos organizuotuose Edinburgo (1958), Stokholmo (1962) ir Maskvos (1966) tarptautiniuose matematikų kongresuose, taip pat UNESCO leidinyje „Naujos tendencijos mokant matematikos vidurinėje mokykloje“ (1965). Iš tiesų, nelabai daug kas iš tradicinio mokyklinio kurso gali būti iš programų išimta ir dar mažiau kas iš šiuolaikinės matematikos į šį kursą gali būti įtraukta. Tačiau tradicinis mokyklinis kursas gali būti dėstomas remiantis šiuolaikinėmis matematikos idėjomis. Tad matematinio švietimo modernizavimas – idėjinis priartėjimas prie šiuolaikinės matematikos, t. t. mokyklinio mokymo kurso dėstymas remiantis jos metodais ir kalba (aišku, atitinkamu mokiniams prieinamu lygiu).

2.2.2. Pradinio matematikos mokymo modernizavimas

Pagal daugiametę tradiciją pradinis matematikos mokymo turinys apsiriboja 4 aritmetikos veiksmų su natūraliaisiais skaičiais mokymusi. Daugelyje šalių ilgą laiką vadovėliai taip ir vadinosi: „Skaičiavimo vadovėlis“, „Skaičiavimas“ ir pan.

Z. Djenešo (*Dienes*) tyrimais nustatyta, kad: 1) 7–10 m. vaikai gali suvokti ir įsisavinti kai ką iš matematikos daugiau negu skaičiavimas; 2) į pradinį matematikos mokymą (būtent matematikos, o ne aritmetikos) gali būti įtrauktos, atsižvelgiant į vaikų amžiaus ypatybes, jiems prieinamu lygiu ir kalba, ir šiuolaikinės matematikos idėjos: aibės, sąryšio, funkcijos, lygties, nelygybės, tikimybės ir kt.

Aišku, skaičiavimo mokymas lieka pagrindinis mokymo tikslas, bet jau nebe vienintelis.

Viena iš pagrindinių idėjų, kurią vystė Z. Djenešas, yra ta, kad mokydamiesi matematikos vaikai turi remtis savo pačių patyrimu. Kita labai svarbi idėja yra ta, kad iš esmės pagerinti skaičiavimo įgūdžius galima tik vaikams gerai suvokus pagrindines matematikos sąvokas ir idėjas, o ne mechaniškai juos treniruojant. Z. Djenešas parengė originalias didaktines priemones, kurios vaikams suformuoja svarbias matematines ir logines sąvokas, pradedant nuo 5 m. amžiaus [45].

Psichologiniai ir pedagoginiai tyrimai rodo, kad yra tikslinga kaip galima anksčiau mokyti loginių operacijų – dar ikimokykliniame amžiuje. Tai turi didžiulę reikšmę ugdymo procese. Tačiau 5–7 m. vaikų logikos tiesiai mokyti negalima. Tam reikia parengti specialią metodiką. Jau pirmasis mūsų minėtas kongresas (1969) skyrė didžiulį dėmesį metodams, skirtiems ankstyvam logikos mokymuisi. Rekomenduotas žaidimų metodas, kai su konkrečiomis daiktų aibėmis atliekamos elementarios operacijos.

2.3. Mokymo modernizavimas

2.3.1. Matematinės veiklos mokymas

Modernizavimas – tai ne atsisakymas viso to, kas yra tradiciška. Tačiau kai kurie tradiciniai matematikos klausimai iš tiesų nebetenka savo reikšmės.

JAV psichologas ir pedagogas Džeromas Seimūras Bruneris (*Bruner*, g. 1915), nagrinėdamas mokymo psichologijos problemas (žinių struktūros vaidmenį mokant, pasirengimą mokymuisi ir intuicijos kilmę), teigia, kad protinė veikla visada yra tokia pati, ar būtum mokslo švyturys, ar trečios klasės mokinukas [118, p. 17]. Aišku, šio teiginio nereikia suprasti pažodžiui. Skiriasi veiksniai, skatinantys atradimus. Tačiau tada, kai mokinys, specialiai sukūrus probleminę situaciją, ką nors atranda pats, jis svarsto kaip mokslininkas. Matematikos mokymas turi būti organizuotas taip, kad mokiniui būtų pateikiamos vis sudėtingesnės probleminės situacijos, kad jis nuosekliai kiltų nuo vieno matematinės veiklos lygio prie kito, aukštesnio.

Kai kas laiko, kad mokiniui atrasti ką nors nauja matematikoje yra kur kas sunkiau, negu išmokti gatavas žinias. Sunkiau pedagogui. Mokiniui, jei bus sudarytos tinkamos sąlygos, sunkiau nebus, gal net lengviau. Nelengva jam išmokti gatavą teiginių ir jų įrodymų sistemą, nesuvokiant jų kilmės, reikšmės ir tarpusavio ryšių. Geriau, kai mokymas organizuotas taip, kad mokiniai patys gali atskleisti matematinius faktus, kurie sudaro mokymosi turinį, o po to – ir logiškai sutvarkyti juos, sukurti sistemą. Tai skatina moksleivių mąstymą, padeda greičiau suvokti mokomąją medžiagą.

Matematinio švietimo reformos prie JAV Ilinojaus universiteto vadovas M. Bibermanas (*Beberman*) akcentavo [33] didaktinį teiginį, kad mokinys pasiekia reikiamą matematikos supratimo ir įsisavinimo lygį tada, kai jis aktyviai dalyvauja matematinių *idėjų* (gr. „ *idea*“ – sąvoka, vaizdinys) ir *procedūrų* (lot. „*procedo*“ – einu į priekį) vystyme. Minėtoji komisija kaip tik ir įnešė didelį indėlį į „atradimų“ metodo išvystymą, priešpriešindama šį metodą „gatavų teiginių įrodymo“ metodui. Tačiau šių metodų lyginti negalima, nes pirmasis reikalauja labai daug laiko. Todėl prieš-

priešinimas pakeičiamas abiejų metodų integracija. Aktyvus matematikos mokymas nesiremia vien tik visko atradimu. Jis reikalingas dažniausiai atitinkamo dalyko ar temos mokymosi pradžioje. Vėliau nauji matematiniai teiginiai mokiniui nebėra tokie netikėti. Tad nuoseklus tų loginių struktūrų, kurios yra matematinės veiklos pagrindas, nagrinėjimas yra svarbiausias matematikos mokymo metodas.

Mokant matematikos reikia skirti *kvaziaktyvumą* (lot. „*quasi*“ – beveik, tartum) – aktyvumą plačiąja prasme, neatsižvelgiant į matematinio mąstymo specifiką, ir matematikos mokymosi *aktyvumą* (lot. „*activus*“ – veiklus). Tam būtina išsiaiškinti matematinės veiklos sandarą ir struktūrą. Kad galėtume nustatyti, ar galės mokinys atlikti kokią nors matematinę veiklą ir kaip ją atlikti jam padės mokytojas, pirmiausia reikia žinoti vaiko mąstymo lygį ir matematinės veiklos, kurios norime jį mokyti, lygius. Šių lygių palyginimas padeda nustatyti, kokia pagalba mokytojui reikalinga, kad mokinio mąstymo veiklos lygį pakeltume iki pageidaujamo matematinės veiklos lygio, arba šį lygį reikia padaryti žemesnį, jei tai būtina.

2.3.2. Matematinės veiklos analizė

Nėra patikimos informacijos, kaip vyksta mokslininko matematiko mąstymo veikla. Tai bandė paaiškinti D. Poja [137]. Paprastai sakoma, anot D. Poja, kad matematika – dedukcinis mokslas, o matematinis mąstymas – dedukcinis mąstymas. Tačiau tai tik viena iš matematikos ir matematinio mąstymo pusių. Baigtinė matematinė teorija iš tiesų yra griežtai dedukcinė. Bet matematika jos kūrimo procese primena bet kurias kitas žinias, esančias kaupimosi, vystymosi procese: teoremą atrandame, suformuluojame anksčiau, negu ją įrodome. Todėl turime numatyti jos įrodymo kelią, tad turime mokyti ne tik įrodinėti, bet ir numatyti, atspėti. Matematikas nekuria abstrakčios dedukcinės teorijos „iš nieko“. Pirmiausia taikomi stebėjimai, lyginimai (analogija, indukcija, hipotezės). Taip pamažu gimsta abstrakti teorija. Logiškai modelis atsiranda po teorijos, psichologiškai jis eina prieš abstrakčią teoriją, būdamas pastarosios sukūrimo stimulu.

Mokslinėje literatūroje pasitaiko įvairių matematinės veiklos schemų, besiskiriančių tik šios veiklos *stadijų* (gr. „*stadion*“ – ilgio matas; kokio nors proceso dalis) arba *aspektų* (lot. „*aspektus*“ – žvilgsnis; atžvilgis, kuriuo nagrinėjamas daiktas, reiškinys ar sąvoka; duomenų paieškos ar jų telkimo į grupes požymis informacinėse sistemose) įvairių pavadinimų ir skaičiaus įvairove. Antai M. Frešė (*Fréchet*) [49] kiekvienoje matematikos šakoje išskiria 4 aspektus: 1) indukcinė sintezė (faktų kaupimas); 2) pirminių sąvokų ir aksiomų sistemos išskyrimas; 3) dedukcinės teorijos sukūrimas; 4) šios teorijos teoremų patikrinimas konkrečiuose modeliuose. V. Feleris (*Feller*) išskiria 3 aspektus: 1) intuityvusis pagrindas; 2) formalusis loginis turinys; 3) taikymai [48]. Matome, kad šios abi teorijos kalba apie tą patį. Tad matematinėje veikloje tikslinga išskirti 3 stadijas (aspektus): 1) faktų kaupimas stebint, atliekant bandymus, remiantis indukcija, analogija; 2) pradinių sąvokų išskyrimas iš sukauptosios medžiagos, aksiomų sistemos suformulavimas ir dedukcinės teorijos sukūrimas; 3) teorijos taikymai. Pirmąją stadiją paprastai vadiname matematiniu empirinės medžiagos sutvarkymu, antrąją – loginiu matematinės medžiagos sutvarkymu, trečiąją – matematinės teorijos taikymu.

2.3.3. Įvairių matematinės veiklos aspektų mokymas

Reikia mokinius mokyti ne gatavų žinių, o mokyti atrasti matematines tiesas (sau, nes moksle jos atrastos), logiškai sutvarkyti jas ir taikyti teoriją praktikoje. Prancūzų matematikas G. Šokė (*Choquet*) teigė [36], kad mokymas tik dedukciniu keliu nevaisingas, daroma žala mokiniui. Visos trys stadijos reikalingos, nes tik jos padės žmogaus smegenyse susiformuoti naujoms struktūroms ir pereiti nuo vieno mąstymo lygio prie kito.

Kad galėtume sėkmingai mokyti matematinės veiklos, būtina žinoti, kokį mąstymo lygį yra pasiekęs mokinys, kurį norime mokyti. Kiekvienoje konkrečioje matematikos srityje galima mąstyti įvairiais lygiais. Mąstymo lygis atitinkamoje srityje – sudėtinga sąvoka, į kurią įeina apibrėžtas nagrinėjamos medžiagos bendrumo, abstrakcijos ir griežtumo lygis, tam tikros loginės struktūros. Kiekvienam lygiui būdinga ir sava kalba, susidedanti iš specialių ir loginių terminų. Pereinant į aukštesnį lygį ši kalba prasiplečia. Kartais dėl to nebesusišnekama (nepatyrę dėstytojai ar mokytojai – su studentais ar mokiniais). Vystymasis, vedantis į aukštesnį mąstymo lygį, – ne biologinis brendimas, o mokymo procesas. Todėl būtina, kad mokymas būtų orientuotas į šio vystymosi paspartinimą.

P. H. van Hilis (*Hiele*) [55] geometrijoje išskiria 5 mąstymo lygius: 1) žemiausias (nulinis) lygis geometrines figūras laiko sveikomis ir skirsto jas tik pagal formą (I klasės mokiniams rodant įmanoma suformuoti stačiakampio, kvadrato, lygiagretainio ir rombo sąvokas, tačiau jie nesuvoks, kad kvadratas – tai rombas ir kartu lygiagretainis); 2) antrasis lygis pasižymi tuo, kad čia vyksta suvokiamųjų figūrų analizė, kuri padeda išaiškinti jų savybes; tos savybės logiškai dar nesutvarkytos, jos nustatomos tik eksperimentiniu keliu; abu pirmieji lygiai pasiekiami pradinėse klasėse; 3) šiame lygyje realizuojamas loginis figūrų savybių ir pačių figūrų sutvarkymas; viena ar keletas savybių apibrėžia figūrą, likusios savybės surandamos loginiu keliu; geometrinės figūros sudaro jau apibrėžtas klases, nustatomas pasinaudojant apibrėžimais, tačiau visiška dedukcija dar nepasiekiama, nes 11–14 metų mokiniai, kuriems šis lygis paprastai taikomas ir yra prieinamas, dar negali suvokti dedukcinės sistemos ištisai; galima tik vietinė dedukcinė sistema vienos temos rėmuose, tai padeda parengti mokinius suvokti visą sistemą, parodo, kad dedukcinis metodas padeda sutrumpinti figūrų savybių tyrimą; 4) ketvirtame lygyje suvokiama visa dedukcijos reikšmė – suvokiama aksiomų, apibrėžimų, teoremų, loginių įrodymų struktūros, sąvokų ir teiginių loginių ryšių reikšmė; šis lygis tinka 15–17 metų mokiniams; 5) šiame lygyje abstrahuojamasi nuo konkrečios objektų kilmės ir santykių tarp jų prasmės; gaunama abstrakti dedukcinė teorija; vidurinėje mokykloje šis lygis nepasiekiamas.

Mokant algebros (su aritmetika) irgi galimi 5 mąstymo lygiai: 1) skaičius neatskiriamas nuo konkrečių objektų aibės, kurią jis apibūdina; operacijos su skaičiais – operacijos su daiktų aibėmis; tai būdinga darželinukams ir mokymosi pradžioje – I klasės mokiniams; 2) skaičiai užrašomi dešimtaine skaičiavimo sistema, atskirti nuo konkrečių objektų aibių, operacijų savybės nustatomos indukciniu keliu; tai būdinga I–VI klasių mokiniams; 3) realizuojamas perėjimas nuo konkrečių skaičių, išreikštų skaitmenimis, prie abstrakčių raidinių reiškinių, reiškiančių konkrečius skaičius tik esant konkrečioms raidžių reikšmėms; realizuojamas „lokalinis“ loginis skaičių savybių sutvarkymas: tai algebros mokymo pradžia; 4) išsiaiškinama visos algebros dedukcinio sudarymo galimybė konkrečioje interpretacijoje, t. y. kada raidės, reiškiančios skaičiavimo objektus, taikomos žymėti *parametrams* (gr. „*parametrōn*“ – atmatuojantis; raidinis koeficientas, turintis pastovią reikšmę tik konkrečiame uždavinyje; pagal konkrečias sąlygas parenkamas funkciją arba matematinį modelį apibūdinantis kiekybinis dydis, kuris nėra konstanta ar kintamasis) ar kintamiesiems, kurie yra atitinkamos skaičių aibės (natūraliųjų, sveikųjų, racionaliųjų ar realiųjų skaičių) elementai, o operacijos turi įprastąją prasmę; 5) abstrahuojamasi nuo konkrečios skaičiuojamųjų objektų prigimties, nuo konkrečios operacijų prasmės ir algebra kuriama kaip abstrakti dedukcinė sistema be jokios interpretacijos; čia pereinama nuo žinomų konkrečių modelių, pasiekiama skirtingų algebrų egzistavimo galimybė, o tos algebros skiriasi formaliosiomis operacijų savybėmis.

Reikia pažymėti, kad kiekviename mokymo etape galima išryškinti pagrindinį lygį, kuriuo atliekamas mokymas, taip pat šiame lygyje pasireiškiančius gretimų lygių elementus. Tai paaiškinama tuo, kad perėjimas iš vieno lygio į kitą atliekamas ne šuoliškai, o palaipsniui, t. y. aukštesnio lygio elementai pasirodo dar iki pereinant prie šio lygio ir jų vis daugėja iki galutinio perėjimo, o perėjus, esant reikalui, dažnai grįžtama prie žemesnio lygio tam, kad būtų galima geriau užtikrinti supratimą. Tradiciškai geometrijos mokoma maždaug trečiuoju lygiu su pirmojo ir antrojo lygių elementais VI–VII klasėse ir su kai kuriais ketvirtojo lygio elementais – vyresniosiose klasėse. Baigiantieji vidurinę mokyklą dažnai nežino dedukcinio geometrijos sutvarkymo prasmės, nesupranta aksiomų ir apibrėžimų reikšmės šiame sutvarkyme. 2000–2005 m. autorius apklausė visus Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademijos pirmakursius. Kariūnams buvo pateikti klausimai: 1) Kas yra aksioma? 2) Kodėl ji nereikalauja įrodymo? Po to pateiktas trikampio vidaus kampų didumų sumos teoremos įrodymas ir klausta, kodėl šis teiginys reikalauja įrodymo. Maždaug patenkinamus atsakymus į visus šiuos klausimus pateikė apie 14,3 % kariūnų.

Tradiciškai mokant aritmetikos ir algebros pirmasis ir antrasis lygiai nepakankamai išvystyti – operacijos su aibėmis neišskiriamos ir nenagrinėjamos išreikštiniu pavidalu. Pasiekiamas trečiasis lygis, tačiau daugelio operacijų savybių loginis sutvarkymas nesiekia ir šio lygio.

Pagrindinis tradicinio mokymo trūkumas yra nepakankamas aktyvaus mokymo taikymas.

2.3.4. Mokinių supažindinimas su matematikos logine struktūra

Vien sąvokos pačios savaime nesudaro mokslo turinio. Maža to, sąvokų formavimo procesas analizuojamas tiek formaliosios logikos, tiek pedagoginiu atžvilgiu, neįmanomas nenustačius tarp jų santykių, nesujungus jų į tam tikrą sistemą, nenumačius naujų sąvokų įvedimo kelių. „Kaip sukurta matematikos sistema?“ – šis klausimas yra toks svarbus, kad, tiksliai neatsakius į jį, mokytis matematikos sunku, o mokyti jos – neįmanoma.

Kaip jau ne kartą pabrėžta aukščiau, matematikos mokslas kuriamas grynai dedukciniu keliu, t. y. bet kurios matematinės teorijos pagrindas yra tam tikros pagrindinės (pradinės) sąvokos, kurios įprastai neapibrėžiamos (nes jų dar nėra kaip apibrėžti). Jų charakteringosios savybės atskleidžiamos aptariant tarp jų egzistuojančius santykius, t. y. per tokius tvirtinimus apie ryšius tarp pagrindinių sąvokų, kurių teisingumas duotojoje teorijoje nenustatomas loginiu keliu (neįrodomas). Visi likusieji teorijos faktai nustatomi įrodant juos loginiu keliu.

N. Burbaki apie tai rašė: „Kad būtų galima apibrėžti struktūrą, nustatomas vienas ar keletas santykių, kurie sieja šios struktūros elementus <...>, po to postuluojama, kad duotasis santykis ar duotieji santykiai tenkina tam tikras sąlygas (kurios išvardijamos ir kurios yra duotosios struktūros *aksiomos*). Sukurti duotosios struktūros aksiominę teoriją – reiškia gauti logines išvadas iš struktūros aksiomų, *atsisakius kokių nors kitų prielaidų nagrinėjamų elementų atžvilgiu* (iš dalies visokiausių hipotezių apie jų „kilmę“) [120, p. 245–259]. Toliau N. Burbaki pažymi, kad „matematinis pasaulis kaip visuma“ yra tam tikra struktūrų *hierarchija* (gr. „*hierarchia*“, „*hieros*“ – šventas+*archē*“ – valdžia), einanti nuo paprasto prie sudėtingo, nuo atskiro prie bendro. Kartu atskleidžiama, kad visa struktūrų įvairovė (t. y. visa matematika) gali būti apribota trimis pagrindinėmis struktūromis: algebrinėmis, tvarkos ir topologinėmis. Bet kuris matematikos skyrius, dėstomas vidurinėje ar aukštojoje mokykloje, gali būti nagrinėjamas kaip dalis šiuolaikinės matematikos pastato, kurio visų aukštų ir kambarių vienam žmogui neįmanoma apeiti ir ištyrinėti. Parenkant mokomąją medžiagą, neverta nukrypti į įvairius dalinius klausimus, kad ir kokie svarbūs jie atrodytų siauriems poreikiams patenkinti; reikia vadovautis galimybe susipažinti su tuo, kas yra bendra, kas yra visoje matematikoje, t. y. supažindinti su pagrindinėmis struktūromis. Tačiau, kadangi struktūros sąvoka yra pakankamai gili abstrakcija, reikia pradėti ne nuo pačių struktūrų, o nuo situacijų, padedančių mokiniams suvokti atitinkamas idėjas.

Labai svarbus yra klausimas apie pagrindinių sąvokų ir aksiomų kilmę. Ir vienos, ir kitos, kaip ir visa žmonijos sukauptų žinių sistema, kilo iš praktinės žmonių veiklos. Būtent dėl to aksiomos nėra kartą ir visam laikui nustatytos tiesos. Vystantis mokslui, jos gali ir turi būti tikrinamos, tikslinamos ir pagrindžiamos. Aprašant vienus ir tuos pačius realaus pasaulio reiškinius gali būti taikomos skirtingos aksiomų sistemos – arba ekvivalenčios viena kitai, arba leidžiančios aprašyti tuos reiškinius naujai, praplečiant, susiaurinant ar iš dalies pakeičiant duotąją sistemą, kuri atitinkamame matematikos mokymo etape geriausiai atitinka besimokančiųjų amžiaus ypatybes. Mokyklinė matematika niekada nebuvo ir nebus kuriama kaip grynai dedukcinė sistema: visada bus naudojamasi ir pertekline aksiomų sistema, ir negriežtais įrodymais.

Pagrindiniai didaktiniai sunkumai yra ne aksiomų sistemos pasirinkimas – mokinys gatavu pavidalu tai gauna iš mokytojo, o tai, kad pati dedukcinė sistema, pagrįsta giliomis abstrakcijomis, pati loginė matematikos sandara natūraliai prieštarauja konkrečiam mokinių gyvenimiškajam patyrimui. Tai ypač ryškiai pasireiškia pačioje matematikos mokymo pradžioje, t. y. kaip tik tada, kada dedami jos įsisavinimo pagrindai. Visas matematikos mokyklinis kursas sukurtas taip, kad mokiniai, eidami iš klasės į klasę, vis labiau pajustų matematikos loginę struktūrą. Nors V–VI klasėse dar nėra nei aksiomų, nei teoremų, daugelis terminų ir atitinkamos sąvokos įvedamos pakankamai tiksliai, palaipsniui pradedami diegti įrodymo elementai.

Įvairiuose mokymo etapuose mokinių supažindinimas su matematikos logine struktūra yra susijęs su įvairiais sunkumais. Labiausiai atsakingi ir sunkūs yra pirmieji žingsniai, susieti su matematikos dedukcinės struktūros atskleidimu: pirmųjų pagrindinių sąvokų įvedimas, pirmųjų aksiomų formulavimas ir pirmųjų teoremų įrodymas. Mokiniai turi pajusti, kad: a) visos sąvokos apibendrinamos ir išskiriamos pagrindinės; b) netikslinga yra apibrėžti tas pagrindines sąvokas. Labai paplitusi didaktinė klaida yra siekimas pakeisti ilgą, kruopštų darbą greitu atitinkamo vadovėlio teksto išmokimu. Patyręs pedagogas ramiai susitaiko su tam tikromis mokinių žinių spragomis šiame mokymo etape, stengiasi ne tiek tikrinti dar menkas jų žinias, o paprastai, gyvai aptarinėti jų žinias pokalbių metu, tačiau, judant į priekį, įvedant naujas sąvokas, jis atkakliai kelia klausimą: „Kaip šią naują sąvoką pagrįsti pagrindinėmis sąvokomis?“ ir reikalauja atsakyti į jį. Pagrindinis sąvokų įvedimo prasmės suvokimas yra glaudžiai susijęs su aksiomų prasmės suvokimu: jų sistema ir apibrėžia pagrindines sąvokas. Tačiau vienu metu ir naujų sąvokų, ir atitinkamų aksiomų, ir loginės vienų bei kitų prasmės išnagrinėti neįmanoma. Sąlyginė aksiomatikos idėjos suvokimo schema atrodytų taip: a) indukcinis faktų, apie kuriuos kalbama aksiomoje, teisingumo patikrinimas, dar neformuluojant pačios aksiomos; b) pastebėtų dėsningumų aptarimas; c) euristinis pokalbis: d) analizė fakto, kad pokalbio metu suformuluotuose tvirtinimuose nėra kitų sąvokų, išskyrus pagrindines; e) išeitos medžiagos įtvirtinimas per kelias pamokas.

Smulkiau visus matematikos mokymo klausimus nagrinėja mokslas apie matematinį ugdymą – matematikos pedagogika.

2.4. Matematikos pedagogika – mokslas apie matematinį ugdymą

2.4.1. Matematikos pedagogikos samprata

„Matematikos pedagogika“ – terminas, pakeitęs ilgai vartotą terminą „matematikos mokymo metodika“, imtas vartoti dėl to, kad jis geriau atspindi reikalo esmę. Matematikos pedagogika pažymi, kad egzistuoja du matematikos mokymo teorijos ir praktikos šaltiniai: pedagogika ir matematika. Terminas „metodika“ naudotinas tik atskirų temų mokymo būdams nušviesti (pvz., „tiesinių lygčių sprendimo mokymo metodika“). Kadangi matematikos mokymo procese ne vien tik mokoma, bet ir auklėjama, tikslinga yra kalbėti apie matematikos didaktiką ir hodegetiką.

2.4.2. Matematikos didaktikos objektas

Matematikos mokymas – sudėtingas valdymo procesas, kurį realizuoja mokytojas, panaudodamas įvairias pagalbines priemones: vadovėlius, vaizdines ir technines mokymo priemones, pratybų sąsiuvinius ir t. t. Naudodamiesi mokymo proceso analize, paremta kibernetikos terminija, laikysime, kad mokymo procesas, kaip ir bet kuris kitas valdymo procesas, turi šias sudedamąsias dalis: informacijos suvokimą, perdirbimą, saugojimą ir perdavimą.

Mokytojas perdirba informaciją, kurią jis gauna iš mokymo programos, mokslinės, mokomosios ir metodinės literatūros, taip pat ir pedagogikos bei psichologijos (apie mokinių mąstymo veiklos lygį ir galimybes) ir perteikia, naudodamasis atitinkamomis priemonėmis, mokomąją informaciją mokiniui.

Mokinys suvokia ir perdirba informaciją, gautą iš mokytojo, vadovėlių ir kt. šaltinių, ir, atsakydamas į klausimus, spręsdamas pratimus ir uždavinius, suteikia mokytojui informaciją apie mokomosios medžiagos įsisavinimo kokybę, pasiektą mąstymo veiklos lygį.

Taigi mokymo procese informacija perduodama dviem kryptimis: iš mokytojo – mokiniui ir iš mokinio – mokytojui. Grįžtamasis ryšys „mokinys – mokytojas“ yra esminė mokymo proceso sudedamoji dalis. Kiekviename mokymo proceso etape būtina atsižvelgti į esamą mokinio mąstymo veiklos lygį, jo atitinkamų mąstymo struktūrų lygį, atitinkamų sąvokų susiformavimą, žinių įsisavinimo kokybę. Be to negalimas efektyvus mokymas.

Pats terminas „matematika“ gali reikšti apibrėžtą mąstymo veiklą (matematinę veiklą) arba teoriją, kuri yra šios veiklos rezultatas. Sąvokoje „matematikos mokymas“ pagalbinė sąvoka „matematika“ gali būti pavartota pirmąja arba antrąja prasme. Taip gautume skirtingas matematikos didaktikas. Pirmuoju atveju tai būtų mokymas kurios nors matematinės teorijos pradmenų, o antruoju – būtų mokoma apibrėžtų mąstymo veiklos aspektų, vadinamų matematine veikla. Kai kas bando supriešinti matematikos mokslininko ir mokinio matematinę veiklą. Tačiau jos gana panašios: kai mokinys pats atranda tai, kas moksle jau seniai atrasta, jis elgiasi kaip mokslininkas. Matematikos didaktikos uždavinys yra formuoti ir tobulinti tas protinės veiklos struktūras, kurios būdingos matematiniam matematikų mąstymui ir padeda daryti atradimus matematikoje. Taigi *matematikos mokymas – tai matematinės veiklos mokymas*.

Mokymo proceso pagrindiniai elementai: *mokymo tikslai* (kam ...?), *mokymo objektas* (ką ...?), *mokymo turinys* (ko ...?) ir *mokymo metodai* (kaip ...?) (vietoje daugtaškio visur įrašomas žodis „mokyti“).

Remiantis bendraisiais mokymo ir auklėjimo tikslais mokykloje, taip pat specifinėmis matematikos ypatybėmis, jos vaidmeniu dabarties moksle, technikoje ir gamyboje, matematikos didaktika pirmiausia apibrėžia matematikos mokymo vidurinėje mokykloje uždavinius ir tikslus, kiekviename jo etape atsižvelgdama į psichologinę atitinkamo amžiaus mokinių charakteristiką. Matematikos didaktika apibrėžia mokymo turinį ir numato mokymo metodus, atitinkančius šį turinį ir mokinių mąstymo lygį. Metodų atitiktį turiniui reikia suprasti kaip tos matematikos dalies, kuri sudaro mokyklinio mokymo turinį, logikos ir metodų atspindėjimą mokymo procese. Mokymo metodų atitiktį mokinių mąstymo veiklos turiniui (atsižvelgimas į psichologinį veiksnį) reikia suprasti ne paprastai – kaip nagrinėjamos medžiagos prieinamumą. Šis atitikimas numato ir maksimalų jau turimų mokinių mąstymo veiklos galimybių panaudojimą, šios veiklos tolesnio vystymosi paspartinimą mokymo procese.

Kadangi matematikos mokymas nagrinėjamas kaip matematinės veiklos mokymas, tai matematikos didaktikoje reikia tirti, analizuoti šią veiklą, kurti jos mokymo metodus.

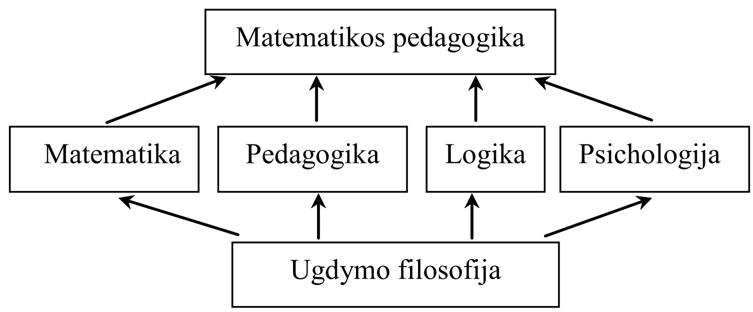
Matematikos didaktika tiria pačios matematikos pagrindus ir galimybes kurti mokyklinį matematikos kursą remiantis tų pačių sąvokų, matematinių idėjų baze. Ji rengia matematinių idėjų formavimo, vystymo mokymo procese metodiką ir dėstymo, remiantis šiomis idėjomis, strategiją.

2.4.3. Dvi problemų klasės ir jų ryšys

Matematikos didaktikoje egzistuoja dvi problemų klasės: 1) mokymo turinio problemos, siejamos klausimu „Ko mokyti?“; 2) mokymo metodų problemos, kurias sieja klausimas „Kaip mokyti?“. Jos yra tarpusavyje susiję ir veikia viena kitą.

2.4.4. Matematikos pedagogikos ryšys su kitais mokslais

Jis gali būti pavaizduotas schema:



Ryšys su filosofija reiškiasi per pastarosios sritį – pažinimo teoriją.

Ryšys su matematika pasireiškia per mokomosios medžiagos atrinkimą, kuris numato atlikti išsamią matematikos idėjų, metodų ir turinio, jos vietos kitų mokslų sistemoje analizę. Atrinktąją medžiagą matematikos didaktika didaktiškai perdirba, išanalizuoja loginę mokomosios medžiagos struktūrą, išnagrinėja įvairius galimus jos pateikimo variantus, juos palygina, parenka būtinus pavyzdžius, konkrečias situacijas, pratimus ir uždavinius, pateisinančius šios medžiagos mokymąsi, iliustruojančius pagrindines sąvokas ir panaudojimą.

Didaktiškai tvarkant matematinę medžiagą, remiamasi pedagogika, logika, psichologija. Šių mokslų vaidmuo – skirtingas. Matematika – pradinis objektas, o likusieji mokslai nurodo, koks turi būti perdirbimo rezultatas (mokomoji medžiaga) ir kaip šį rezultatą pasiekti.

Remiantis tuo, kad matematikos mokymas yra matematinės veiklos mokymas, matematikos pedagogika pirmiausia analizuoja šią veiklą, remdamasi logika ir psichologija

Rėmimasis pedagogika (didaktika) pasireiškia mokymo metodų – bendrųjų ir specifinių – parinkimu. Pirmieji turi užtikrinti didaktinių principų realizavimą mokant matematikos, antrieji – mokinių matematinės veiklos formavimą ir vystymą. Remiantis didaktika, atsižvelgiama į joje skatinamas šiuolaikines mokymo tobulinimo tendencijas. Bendrieji ir specifiniai mokymo metodai glaudžiai susipina mokymo procese.

Matematikai paprastai priskiriamas ypatingas vaidmuo lavinant mokinių loginį mąstymą, nes mokantis matematikos reikia ypač daug galvoti darant įvairias logines išvadas. Bet vien darbas, nesuprantant to, kaip svarstoma, neprivers mokinių mąstyti logiškai. Tam reikia ir matematikos pedagogikos „įsikišimo“.

Logika, kuria remiamasi matematikos pedagogikoje – tikimybinė, nes joje gaunamos išvados – daugiausia hipotetinės, kurios patvirtinamos arba paneigiamos eksperimentiniais metodais. Skiriamas logikos taikymas matematikos pedagogikoje, susijęs su pedagoginių problemų, iškylančių mokant matematikos, sprendimu, ir taikymas, susijęs su tiesioginiu logikos elementų mokymusi ir panaudojimu mokant matematikos. Pirmo tipo taikymo pavyzdys: struktūrinė mokyklinio matematikos kurso analizė siekiant jį didaktiškai apdoroti. Tiesioginis logikos elementų įvedimas į matematikos kursą atliekamas tam, kad kai kurie iš jų taptų pačia matematikos mokymo dalimi, svarbiu darbiniu instrumentu, keliančiu mokymo proceso efektyvumą.

Logika tiria teisingų samprotavimų formas, ji pateikia išvedimo taisykles, leidžiančias iš duotųjų premisų gauti išvadą, abstrahuojantis nuo išvadų mechanizmo, nuo to, kaip faktiškai vyksta mąstymo procesai, kaip žmogaus smegenys suvokia, saugo, perdirba ir perduoda informaciją. O tai nagrinėja psichologija ir aukštosios nervinės veiklos fiziologija. Taigi negalima remtis vien logika, kuri tiria tik mąstymo veiklos rezultatus, o ne pačią šią veiklą. Aišku, matematikos pedagogika nedaro kokių nors naujų atradimų psichologijoje, ji naudojasi jos tyrimo rezultatais.

2.4.5. Matematikos pedagogikos metodai

Jie yra tokie: 1) matematikos ir matematinio švietimo istorijos nagrinėjimas bei sukauptos jose patirties panaudojimas; 2) šiuolaikinės matematikos mokymo patirties panaudojimas; 3) matematinės kalbos, matematikos idėjų bei metodų perkėlimas į mokymą ir didaktinis apdorojimas; 4) pedagoginis eksperimentas.

Matematikos istorija suteikia svarbios informacijos apie istorinį matematinių sąvokų, metodų, kalbos vystymosi kelią. Ji dažnai nurodo, kaip mokant matematikos reikia formuoti matematines sąvokas, supratimą apie jos metodus ir kalbą. Tačiau istorinio patyrimo taikymas nėra universalus. Ne visada tikslinga mokykliniame etape eiti tuo keliu, kuriuo tūkstančius metų formavosi kokios nors matematinės sąvokos. Žinomas olandų matematikas Hansas Froidentalis (*Freudenthall*, g. 1905) tvirtino, kad matematikos istorija atskleidžia mums matematinių sąvokų seką ir istorines jos susiformavimo prielaidas, bet darytume milžinišką klaidą, jei mokytume matematikos pagal istorinę schemą [50, 51, 146].

Matematinio švietimo, didaktinių idėjų raida rodo, kaip kito mokyklinio matematikos mokymo turinys ir metodai, vystantis ir pačiai matematikai, ir žmonijos poreikiams. Savo laiku simbolinės algebros kalbos įvedimas į mokyklą buvo sutiktas priešiškai, nors šios kalbos sukūrimas buvo didžiulis laimėjimas, jos taikymas smarkiai suprastino uždavinių sprendimą ir šiuo metu niekas neabejoja aukščiau minėto įvedimo į mokyklą nauda. Yra daug veikalų, aptariančių Lietuvos matematinio švietimo raidą [6, 7, 12–14, 32]. Mokytojui pravartu su jais susipažinti – jis galės kai ką pritaikyti savo darbe.

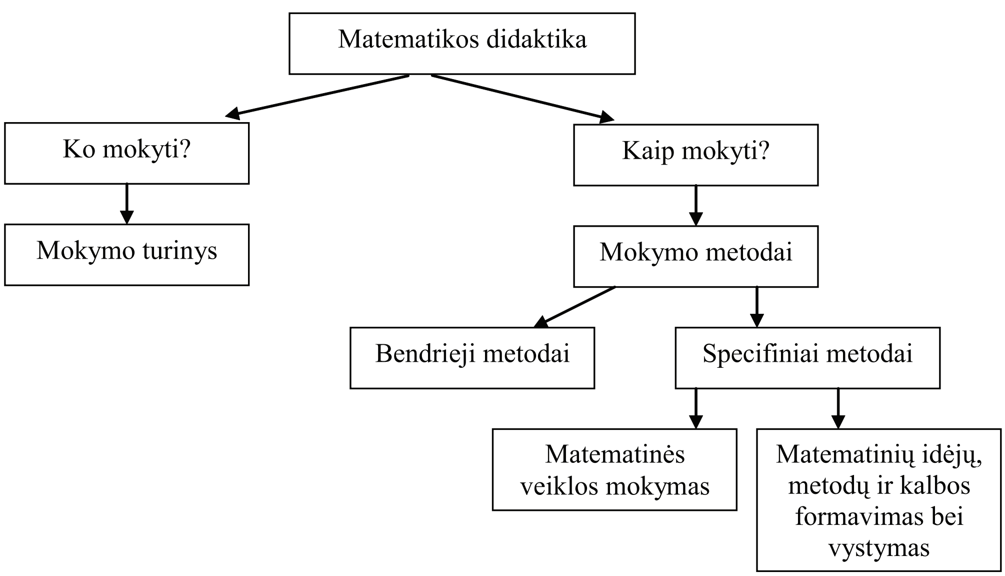
Mokytojo veikla – kūrybinė. Suprasdamas mokyklinio matematikos mokymo ryšius su šiuolaikine matematika, pedagogika, logika ir psichologija, mokytojas, gerai pasirengęs iš matematikos ir jos pedagogikos, kūrybiškai spręs pedagogines problemas, nuolat eksperimentuos, stengsis tobulinti mokymo metodus, kūrybiškai ieškos didaktinių kelių, kaip mokyti atskirų mokomosios programos temų, net ir pačių sunkiausių, sudėtingiausių. Šį patyrimą reikia apibendrinti, skleisti. Neužmiršti ir užsienio pedagogų patirties pritaikymo mūsų sąlygomis.

Matematikos pedagogika naudojasi „perkėlimo“ metodu: matematikos mokslo idėjos, metodai, kalba perkeliama į mokyklinį jos mokymą. Tai, tačiau, nereiškia, kad šis procesas vyksta savaime, nieko nekeičiant. Mokslo idėjos, metodai, kalba turi būti didaktiškai apdoroti.

Matematikos pedagogika plačiai naudoja eksperimento metodą. Teisingas eksperimento organizavimas yra susijęs su dideliais sunkumais. Tai paaiškinama pirmiausia nepakankamu žmogaus mąstymo veiklos pažinimu, atitinkamų prietaisų (kaip fizikoje, chemijoje, technikoje) nebuvimu. Todėl būtina itin kruopščiai parengti eksperimento metodiką, pašalinti subjektyvius veiksnius, duomenis apdoroti statistiniais metodais.

2.4.6. Matematikos didaktikos struktūrinė schema

Viena svarbiausių matematikos didaktikos dalių yra matematikos didaktika. Jos struktūrinė schema yra tokia:



2.5. Pagrindiniai didaktiniai principai mokant matematikos

Didaktiniai principai (lot. „*principium*“ – pradžia, pagrindas) – visuma vieningų reikalavimų, kuriuos turi tenkinti bet kurio dalyko mokymas.

Mokymo moksliškumo principas mokant matematikos pasireiškia tuo, kad mokymo turinys ir metodai turi atitikti matematikos mokslo šiuolaikinės būklės lygį ir reikalavimus. Kitais žodžiais – mokiniams reikia pateikti tokius faktus, formuoti tokias sąvokas, kurios dabar pripažintos mokslinėmis. Matematikos mokymo procese moksliškumo principas pasireiškia kiekviename žingsnyje. Matematikos mokytojas turi: a) stebėti matematinių sąvokų ir teiginių formulavimo korektiškumą; b) mokyti mokinius kritiškai vertinti kiekvieną teiginį, nepriimti neįrodytų, nepagrįstų teiginių, reikalauti tiksliai skirti apibrėžimus ir teoremas. Moksliškumo principas taip pat reikalauja, kad mokomoji medžiaga turi (pagal galimybes) atitikti šiuolaikinio mokslo lygį, ji turi būti dėstoma tam tikra didaktine sistema, primenančia mokslinę sistemą, tam tikru nuoseklumu, išsaugančiu ryšį tarp sąvokų, temų, skyrių dalyko viduje, taip pat ir tarpdalykinius ryšius. Didaktinė sistema apibūdinama taip: a) ji primena (bet neatgamina tiksliai) mokslinę sistemą, išsaugodama (pagal galimybes) bendrais bruožais jai būdingą logiką ir žinių sistemą; b) joje remiamasi ankstesne medžiaga; c) visa dalyko žinių sistema, medžiagos išdėstymas pamečiui atitinka besivystančias mokinių psichologines ypatybes bei galimybes ir užtikrina tolesnį jų ugdymą; d) atskleidžia vidinius ryšius tarp sąvokų, dėsningumų, taip pat realizuoja tarpdalykinius ryšius.

Mokymo sąmoningumo ir aktyvumo principas reikalauja sąmoningai ir kūrybiškai mokytis kiekvieną dalyką, tikslingai aktyviai suvokti nagrinėjamus reiškinius, juos įprasminti, kūrybiškai perdirbti ir taikyti. Mokant matematikos tai pasireiškia tokiu būdu (žr. žemiau pateiktus 6 punktus).

1. Kiekviena nauja tema ar skyrius pradedamas trumpu įvadu, susiejančiu jau išnagrinėtą medžiagą su naująja, išaiškinančiu teorinę ar praktinę šios temos reikšmę, parodančiu šios temos reikšmę bendroje žinių sistemoje, apibrėžiančiu tam tikrus klausimus, kuriuos reikės išnagrinėti, nurodančiu galimą žinių praktinio taikymo sritį.

2. Pradedant naujos temos nagrinėjimą, būtina remtis mokinių gyvenimiška patirtimi, jų intuicija. Tam organizuojami stebėjimai ir eksperimentai, nagrinėjami įvairūs pratimai ir uždaviniai, natūraliai padedantys susiformuoti abstrakčioms sąvokoms, kurios vėliau iliustruojamos vaizdiniais modeliais, taip padedant mokiniams įsisavinti žinias pereinant šias pakopas: suvokimas – vaizdinys – sąvoka.

3. Mokydamas matematikos mokytojas taiko įvairius metodus, kurių kiekvienas veda į konkretų tikslą optimaliu duotomis sąlygomis keliu, žadindamas bei stiprindamas mokinių interesą nagrinėjamai temai, skatindamas jų norą ir gebėjimą dalyvauti aktyvioje veikloje. Mokymo metodai pasirenkami tokie, kad suteiktų galimybę patiems daryti „atradimus“, jei tik nagrinėjamoji medžiaga nereikalauja rimtų matema-

tinių svarstymų, sudėtingų formuluočių, kada lengviau remtis gyvu mokytojo žodžiu ar vadovėlio tekstu.

4. Ugdomas mokinių kūrybinis požiūris į kiekvieną nagrinėjamą klausimą. Tam padeda savarankiškas uždavinių sprendimas ir teoremų įrodymas, atsakymas į nestandartinius klausimus iš anksčiau išmoktos medžiagos ar iškilusių jos mokymo procese, skatinimas ieškoti natūraliausių, trumpiausių ar originaliausių uždavinių sprendimo būdų.

5. Ugdomas poreikis kritiškai įvertinti savo darbo rezultatus, formuojami savikontrolės gebėjimai, mokėjimas trumpai ir aiškiai formuluoti mintis žodžiu ir raštu.

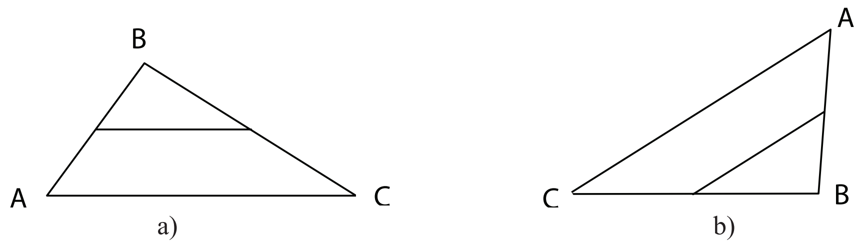
6. Namų darbai mokiniams skiriami pagal jų jėgas, jų neperkraunantys. Juose rekomenduotina pateikti 1–2 sunkesnes neprivalomas užduotis.

Jei matematikos mokymas tenkina aukščiau išdėstytus reikalavimus, mokinių mokymosi veikla bus aktyvi, o tai reiškia, kad žinios ir mokėjimai bus įgyti sąmoningai. Levas Tolstojus (1828–1910) neveltui teigė, kad „matematika moko ne skaičiuoti, bet moko žmoniškosios minties būdų skaičiuojant". Taiklūs talentingo rašytojo ir pedagogo žodžiai!

Įsisavinimo sąmoningumas – toks žinių įsisavinimas, kuris pagrįstas giliu jų supratimu ir mokėjimu jas pritaikyti naujose konkrečiose situacijose. Sunkumus, susijusius su sąmoningumo principo realizavimu, iš dalies lemia tai, kad iki šio laiko nepakankamai yra išnagrinėtas supratimo mechanizmas. Mes tik intuityviai suvokiame „supratimo" sąvoką ir išvada apie mokinio supratimą paprastai yra tik tikėtina.

Mokymo procese mes turime nuolat gauti informacijos apie mokomosios medžiagos įsisavinimą. Tai padeda atlikti klausimų, pratimų, uždavinių sistema. Klausimai visada turi turėti tam tikrą *entropiją (neapibrėžtumą)* (gr. „*en*" – viduje, „*tropē*" – posūkis, pavirtimas; informacijos teorijos sąvoka – bandymo rezultato neapibrėžtumo matas; sąvoką 1948 m. ėmė vartoti JAV mokslininkas Klodas Elvudas Šenonas (*Shannon,* g. 1916) informacijos kiekiui teiktyje nustatyti, o pirmasis jį pavartojo vokiečių fizikas, vienas termodinamikos pradininkų Rudolfas Klauzijus (*Clausius,* 1822–1888), suformulavęs antrąjį termodinamikos dėsnį). Kuo didesnė klausimo entropija, tuo daugiau informacijos privalo turėti atsakymas į jį. Visada reikia siekti optimalios entropijos.

Sąmoningo įsiminimo priešybė – žinių *formalizmas*. Jau minėjome, kad formalios žinios apibūdinamos tuo, kad išmokstamos ir įsimenamos išorinės, formalios, simbolinės matematinio fakto išraiškos, o paties fakto sąmonėje arba iš viso nėra, arba jis niekaip nesusijęs su savo formaliąja išraiška. Pvz., mokiniai: 1) išsprendžia tiesinių lygčių sistemą, kai kintamieji joje pažymėti raidėmis x ir y, bet negali išspręsti jos, kai kintamieji pažymėti raidėmis m ir n; 2) įrodo teoremą apie trikampio vidurinės linijos savybes tada, kai brėžinys orientuotas taip, kaip vadovėlyje (35 pav., a), bet nežino kaip elgtis kitu atveju (b):



35 pav.

3) laiko, kad visada $-x < 0$, nes prieš x yra minuso ženklas; 4) žino skaičiaus modulio apibrėžimą, bet negali išspręsti lygties $|a| = 2$ ar nelygybės $|a| < 2$.

Svarbi sąlyga, padedanti išvengti formalizmo žiniose, – toks mokymas, kai teisingai išmokstama matematinė kalba, giliai suvokiama jos semantika.

Nepaprastai svarbus yra ir mokinio aktyvumas mokymo procese – nesant aktyvios mąstymo veiklos negalima įsisavinti žinių. Kalbant paprasčiau, niekas į mokinio galvą žinių įdėti negali – jis turi jas pasiimti pats savo sąmoningai aktyviu darbu.

Mokymo vaizdumas – vienas svarbiausių didaktinių principų. Sąvokų formavimas – sudėtingas psichologinis procesas, prasidedantis nuo paprasčiausių pažinimo formų – pojūčių ir vykstantis tokiu nuoseklumu: pojūčiai – suvokimas – vaizdinys (*jutiminė pakopa*) – sąvoka (*loginė pakopa*). Vaizdumo naudojimas sąvokų formavimo procese bus efektyvus, jei jis padės proceso eigai, orientuos mokinius į esminių formuojamos sąvokos savybių abstrahavimą ir apibendrinimą.

Ne visada būtina pradėti nuo pojūčių. Pvz., kai susiduriame su begalybės sąvoka (tiesė, plokštuma, racionaliųjų skaičių tankumas tam tikrame intervale, riba ir pan.), tai jutiminė pakopa čia atkrinta ir vaizdumas nepadeda.

Vaizdumo principas remiasi nagrinėjamos medžiagos suvokimo, įprasminimo ir apibendrinimo procesų esminėmis savybėmis. Skirtinguose medžiagos įsisavinimo etapuose vaizdumas atlieka skirtingas funkcijas. Kada mokiniai nagrinėja išorines objekto savybes, tada jie patys gali tiesiogiai gauti žinių apie jas. Jei didaktinis tikslas yra ryšių bei santykių tarp objektų ar jų savybių ir mokslinių sąvokų formavimas, vaizdinės priemonės yra tik ramstis įprasminant šiuos ryšius, jos konkretizuoja bei iliustruoja šias sąvokas.

Būtina prisiminti, kad vaizdinių priemonių naudojimas negali būti savitikslis. Bereikalingas jų naudojimas gali duoti nepageidaujamų rezultatų. Konkretus vaizdumas turi laiku užleisti vietą abstrakčiajam.

Žinių tvirtumo principas reiškia galimybę remtis įgytomis žiniomis, mokėjimais ir įgūdžiais tolesniuose mokymosi etapuose bei gyvenime. Ši galimybė gali virsti tikrove tik tada, kai žinios mokėjimai ir įgūdžiai įsisavinti tvirtai, gerai įtvirtinti ir nuolat tobulinami. Mokant matematikos tai realizuojama, jei mokytojas: 1) tinkamai organizuoja išeitos medžiagos kartojimą (prieš pateikdamas naują medžiagą, pateikimo metu, apibendrindamas ir t. t.); 2) laiku atlieka žinių ir mokėjimų tikrinimą, taip išaiškindamas ir šalindamas žinių spragas; 3) kreipia ypatingą dėmesį į tikslingą sisteminį uždavinių ir pratimų pateikimą mokiniams. O mokiniai privalo: 1) atsakinėdami išdėstyti išmoktą medžiagą trumpai ir aiškiai, remdamiesi praktiniais pavyzdžiais; 2) stengtis sėkmingai atlikti įvairiausius savarankiškus darbus; 3) stengtis greitai ir tiksliai atgaminti pagrindinių sąvokų apibrėžimus, teoremas, formules, dėsnius ir t. t. Šis principas reikalauja, kad mokiniai gana ilgą laiką išsaugotų atmintyje sistemingas žinias, mokėjimus ir įgūdžius. Tai irgi labai susiję su supratimu – mokymosi sąmoningumo principu, o kartu – ir su aktyvumu.

Žinios negali būti tvirtos, jei jos nesusistemintos, nesusietos bendromis idėjomis. Tai užtikrina mokymo moksliškumo principo realizavimas.

Be šių principų, yra būtina atitinkamai organizuoti mokymą, atsižvelgiant į įsiminimo mechanizmo tyrimo rezultatus. Bendrosios pedagogikos teiginiai, kuriais remiasi mokymo organizavimas, yra tokie: a) įsiminimas tiesiai proporcingas kartojimui; b) atmintis turi pasirinkimo savybę: geriau įsimenama tai, kas mums yra svarbu, kada įsiminimo motyvas – medžiagos taikymas praktikoje, kada medžiaga įdomi, emocingai nuspalvinta; c) įsiminimui padeda nagrinėjamos medžiagos suskaidymas į mažas porcijas, išskiriant atraminius taškus tezių, pavadinimų, klausimų pavidalu.

Ką turi įsiminti mokinys iš matematikos? Visiškai aišku, kad viską įsiminti ilgam laikui ir negalima, ir nereikia. Apibrėžimai, teoremos, aksiomos – jų tikslus formulavimas gali užsimiršti, tačiau sąvokos, sąryšiai tarp jų turi išlikti mokinių sąmonėje intuityviai aiškūs. Taigi griežtos matematinės formuluotės turi būti suformuluotos tik po to, kai atitinkami objektai ar jų savybės yra suvoktos intuityviai.

Ilgam neįsimenami ir įrodymai. Mokymas ir neturi būti orientuojamas į įrodymų įsiminimą. Mokiniai turi būti skatinami patys ieškoti įrodymų ir atrasti, kai tai būtina.

Svarbiausia kartojimo rūšis – kartojimas, kurio tikslas – pakartotąją medžiagą čia pat pritaikyti naujai medžiagai įsisavinti. Tai susieja skirtingas sąvokas, teiginius į vieningą sistemą, padedančią geriau įsiminti tiek anksčiau išeitąją, tiek naują medžiagą. Tad būtent toks kartojimas yra esminė matematikos mokymo proceso dalis.

Mokymo sistemingumo ir nuoseklumo principas išplaukia ir iš pačių mokomųjų dalykų logikos, ir iš mokinių pažintinės bei praktinės veiklos, kuri yra susijusi su protinio ir fizinio vystymosi dėsningumais. Šis principas – mokomųjų programų sudarymo pagrindas. Juo remiasi mokytojo darbo sistema, reguliuojanti mokinių veiklą mokymo procese.

Matematikos mokymo sistemingumas numato apibrėžtą tvarką, kurios turi būti laikomasi nagrinėjant ir tiriant faktus, palaipsniui įvaldant pagrindines mokyklinio matematikos kurso sąvokas ir teiginius. „Tik sistema, aišku, protingai sukurta, kylanti iš pačios objektų esmės, suteikia mums realią valdžią savosioms žinioms, – rašė K. Ušinskis. –

Galva, pripildyta fragmentiškų, tarpusavyje nesusijusių žinių, panaši į sandėlį, kuriame viskas suversta netvarkingai ir kuriame pats šeimininkas nieko negali rasti“ [143, p. 355]. Skirdamas tai, kas yra svarbiausia, o kas antraeilis dalykas matematinėse žiniose ir mokėjimuose, sujungtuose į tam tikrą sistemą, mokinys visada sugebės lengvai atgaminti tai, kas yra užmiršta, ir laisvai pasinaudoti tomis žiniomis, kai jų prireiks.

Matematikos mokymo nuoseklumas reiškia, kad mokymas vyksta einant: a) nuo paprasto prie sudėtingo; b) nuo vaizdinių prie sąvokų; c) nuo žinomo prie nežinomo; d) nuo žinių prie mokėjimų ir įgūdžių. Mokytojas sėkmingai įgyvendins šį principą, jei matematikos mokymas bus grandinė nuoseklių žingsnių, kurių kiekvienas papildo mokinių turimas žinias ir mokėjimus atitinkama naujų žinių ir mokėjimų baze, kuri vėl padeda toliau pilnėti grandinei. Padėti realizuoti šį principą mokytojui padeda vadovėlių ir kitų mokomųjų knygelių autoriai, kurie paprastai griežtai paiso šio principo reikalavimų, rengdami savąsias mokomąsias knygeles.

Mokymo prieinamumo principas reikalauja atsižvelgti į mokinių amžiaus tarpsnių ypatybes. Svarbiausia yra tai, kad mokomoji medžiaga, jos turinys ir apimtis atitiktų mokinių protines galimybes įsisavinti tą medžiagą. Taikomi mokymo metodai turi atitikti reikalavimus mokinių vystymui ugdymo procese, orientuotis į jų gebėjimų lavinimą. Plačiai apie šio principo realizavimą mokant matematikos pradinėse klasėse rašo savo dviejų dalių monografijoje [72, 73] Danutė ir Arkadijus Kiseliovai.

Mokant matematikos šis principas jokiu būdu nėra reikalavimas kiek galint palengvinti žinių ir mokėjimų įvaldymą. Kalbama apie tai, kad matematikos mokymas neturi būti tiek sunkus, kad taptų neprieinamas mokiniams, pakirstų jų tikėjimą savo jėgomis ir galimybėmis. Kartu matematikos mokymas numato būtiną mokiniams atitinkančių jų jėgas sunkumų nugalėjimą. Tada atsiranda pasitikėjimas savo jėgomis, noras siekti geresnių rezultatų.

Auklėjamojo mokymo principas išreiškia kryptingą mokinių auklėjimą taip, kad jie galėtų suprasti ir paaiškinti gamtos ir visuomenės gyvenimo reiškinius, būtų aukštos moralės. Matematikos mokymo procese ypač svarbu ugdyti interesą šiam dalykui, matematinėms žinioms, jų nuodugniam įsisavinimui, formuoti mokėjimus naudotis jomis, plėsti jas savarankiškai. Taigi matematikos mokymas yra auklėjamasis mokymas, jei efektyviai lavina mokinių mąstymą, praturtina jį naujais vaizdiniais ir sąvokomis, padeda sutelkti dėmesį ir gerinti atmintį, plėtoti kūrybinės vaizduotės gebėjimus, ugdyti valią ir teigiamus jausmus. Auklėjimas mokykloje – tai intelektinių ir moralinių, valios ir kt. savybių ugdymas. Matematikos mokymo procese reikia laikytis bendrųjų auklėjimo reikalavimų: 1) auklėjimas turi būti nenutrūkstamas, planingas, būtina nesitenkinti epizodinėmis auklėjimo priemonėmis; 2) neprievartinis, geriau – paslėptas, kada jo potekstė suvokiama mokinių kaip vidinė savarankiškai susiformavusi elgsenos norma ar įsitikinimas; labai svarbus mokytojo pavyzdys, jo moralinės savybės; 3) auklėjimas mokymo procese idealiai turi peraugti į saviauklą; 4) matematikos, kaip ir visų kitų dalykų, mokymas turi būti auklėjamasis.

Auklėjamasis mokymas turi suteikti ne tik reikalingas žinias, bet ir diegti bendrąją kultūrą. Pirmiausia, mokiniai turi suvokti matematikos vaidmenį žmonijos kultūros istorijoje, matematikos ryšį su kitais mokslais, jos fundamentinį vaidmenį gamtos ir technikos moksluose. Matematikos mokymo procese mokiniams parodoma, kad matematinės abstrakcijos (skaičiaus, figūros, funkcijos sąvokos) nėra „grynojo proto“ produktas, o realios tikrovės objektų bei reiškinių atspindėjimas ir mokslinis apibendrinimas ilgaamžės žmonijos praktinės veiklos procese. Todėl pirmiausia reikia parodyti, kad matematikos atsiradimo šaltinis – realus pasaulis. Matematikos mokymo procese yra didelės galimybės ugdyti garbę, teisingumą, atkaklumą (viską atlikti pačiam, nugalėti sunkumus, nenusirašinėti nuo draugų), patriotizmą (pvz., sprendžiant laiko skaičiavimo uždavinius istorine ir kultūrine tematika).

Matematikos mokymo sėkmė priklauso nuo mokinių nuolatinio intereso jai. O tas interesas atsiras tada, kai mokiniui yra suprantama tai, ką aiškina mokytojas, kai jam pateikiami uždaviniai yra įdomūs savo turiniu ar sprendimo būdais, kada mokiniui sudaromos galimybės pačiam pagalvoti, padaryti išvadą, apibendrinti ir t. t., t. y. kada mokiniui atsiveria plati vienos ar kitos temos mokymosi perspektyva, atsiranda pasitikėjimas savo jėgomis. Todėl matematikos mokymo procese būtina laikytis didaktinių principų nurodymų: eiti nuo paprasto prie sudėtingo, nuo konkrečių stebėjimų, pavyzdžių, bandymų, prie išvadų ir apibendrinimų, prie taisyklių, apibrėžimų, teoremų formulavimo. Mokiniui būtina suteikti progų pasidžiaugti protinio darbo rezultatais, pasidžiaugti kūryba, atradimais, pergalėmis. Tegu ši kūryba bus atradimas to, kas buvo seniai atrasta, pergalė – sėkmingas uždavinio išsprendimas. Kuo dažniau bus progų patirti džiaugsmą, tuo pastovesnis ir gilesnis bus mokinio domėjimasis matematika. Svarbu ir tai, kaip mokytojas tai skatina.

Estetinis auklėjimas – formavimas tokios žinių ir įgūdžių sistemos, kuri būdinga visoms meno rūšims, visoms grožio pasireiškimo formoms – atliekamas pamokoje ir užklasinėje veikloje. Matematika estetiniam auklėjimui pateikia daug medžiagos ir galimybių. Tokios matematinių objektų savybės, kaip simetrija, taisyklingųjų daugiakampių forma, figūros matmenų santykis ir kt. suteikia galimybes sukelti estetinius jausmus. Pvz., jei paimsime keletą įvairių stačiakampių, maloniausias akiai bus tas, kurio kraštinės sudaro santykį $34 : 21 \approx 1{,}62$.

„Lietuvos Lomonosovas“* – prelatas Aleksandras Dambrauskas – Adomas Jakštas (1860–1938) savo knygoje „Dieviškoji proporcija. Matematiškas dailės dėsnis“ (1921) teigė, kad egzistuoji dieviškoji proporcija – $a : x = x : (a - x)$, kurios pritaikymas architektūroje (Kauno rotušė), muzikoje, poezijoje (Maironio eilėraštis „Jaunos

* Michailas Lomonosovas (1711 – 1765) – rusų mokslininkas, poetas, pasireiškęs labai įvairiose mokslo srityse

dienos“, kuriame yra 86 žodžiai, 50 iš jų – daiktavardžiai, būdvardžiai, veiksmažodžiai, 36 – kitos kalbos dalys ir 86 : 50 ≈ 50 : 36), gamtos objektuose (žmogaus, gyvūnų kūnų, augalų lapų sandaroje) yra grožio, darnos pavyzdys. Kitoje savo knygoje „Matematiškas bičių instinktas ir vabalas matematikas“ (1921) A. Jakštas, remdamasis gražiai matematine korių struktūra, teigia, kad tai Dievo – kūrėjo indėlis į gamtos harmoniją. O čia – jau matematikos galimybės katalikiškame auklėjime [6, p. 44–45].

Estetinį pasigėrėjimą sukelia ir gražūs, originalūs uždavinių sprendimai, estetiškai pagamintos vaizdinės mokymo priemonės. Anykščių Jono Biliūno gimnazijos mokytojos Rasa Polikevičiūtė-Kirtiklienė ir Gražina Verbickienė, jau minėta rokiškėnė mokytoja R. Rumšienė, Juodupės mokytoja edukologijos magistrė Regina Barauskienė savo matematikos pamokose pradinėse klasėse demonstravo tikrai didelį estetinį pasigėrėjimą kėlusias mokymo priemones. Estetinį pasigėrėjimą kelia ir daugelio dabar vartojamų mokyklose vadovėlių [25–28, 37–39, 77–80 ir kt.] bei pratybų sąsiuvinių iliustracijos. Taigi šis principas – matematikos didaktikos ir hodegetikos sandūra.

Santykiškai naujas didaktinis principas – *diferencijuoto ir individualizuoto mokymo principas*. Jis atsižvelgia į vaiko individualios raidos ypatybes, siekia mokymo procese geriausiu būdu skatinti mokinių kūrybines jėgas bei gebėjimus. Šis principas numato optimalų mokomosios medžiagos bei mokymo metodų pritaikymą kiekvieno mokinio individualiems gebėjimams. Diferencijuotas mokymas paprastai numato sąlyginį mokinių dalijimą į judrias grupes (kurių sudėtis nėra pastovi). Dažniausiai turime tris grupes: stipriųjų, vidutiniųjų ir silpnųjų. Matematikos mokymo procese mokytojas turi nuolat turėti omenyje šias tris mokinių kategorijas ir taip planuoti savo darbą, kad optimaliai patenkintų kiekvieną iš šių trijų grupių. Svarbu yra išlaikyti pedagoginį taktą, nevartoti šių grupių pavadinimų darbe su mokiniais.

Kita diferencijuoto mokymo atmaina – labai plačiai dabar taikomas grupinis mokymas heterogeninėse (gr. „*heteros*“ – kitas, „*genos*“ – giminė) – nevienalytėse gebėjimų atžvilgiu mokinių grandyse atliekant įvairias pratybų užduotis. Iš stebėtų pamokų grupinio darbo metodikos išradingumu ypač pasižymėjo Rokiškio „Ąžuoliuko“ mokyklos darželio pradinukų mokytojos Giedrės Narkūnaitės pamoka. Daugiau ar mažiau grupinio darbo elementus savo pamokose taikė jos kolegė Irina Šutienė, anykštėnės pradinukų mokytojos Daiva Guobužienė, Elena Bražiūnienė (Antano Baranausko vidurinė mokykla), Jolita Karosienė (A. Vienuolio gimnazija), Skaidrina Ratautienė (J. Biliūno gimnazija). Vieną iš grupinio darbo atmainų – darbą poromis savo pamokoje sumaniai panaudojo anykštėnė pradinukų mokytoja Asta Grinienė (J. Biliūno gimnazija).

Greičiau atlikusiems savarankiško darbo užduotis papildomų užduočių buvo parengusios ir pamokose jas panaudojo Rokiškio „Romuvos“ gimnazijos pradinukų mokytoja Sigita Galvelienė, anykštėnė J. Karosienė.

Svarbios mokinio (valdomojo objekto) savybės: mąstymo, atminties, , charakterio ir valios. Jeigu būtų galima kokiu nors būdu išmatuoti atskirų mokinių matematinės medžiagos įsisavinimo greitį, tai matytume kur kas didesnius skirtumus negu mokantis kitų mokomųjų dalykų. Tai paaiškinama tuo, kad įsisavinant matematinę medžiagą reikia kur kas intensyvesnės mąstymo veiklos, aukštesnio apibendrinamosios ir abstrahuojančios veiklos lygio. Tad pastarojo principo svarba mokant matematikos yra itin didelė. Plačiai šis principas išnagrinėtas bendrojoje didaktikoje, jo taikymas matematikos didaktikoje Lietuvoje irgi yra analizuotas [13].

Išnagrinėtieji didaktiniai principai išreiškia mokymo proceso dėsningumus ir jų laikymasis yra būtina pedagoginės mokytojų veiklos sėkmės sąlyga. Principai sudaro sistemą, jie tarpusavyje glaudžiai susiję. Nei vienas iš jų nėra universalus, bet kurio iš jų taikymas izoliuotai nuo bendros principų sistemos neduoda būtinų rezultatų.

Reikia pažymėti, kad matematikos mokymo procesas yra labai sudėtingas ir prieštaringas. Net ir labai patyręs mokytojas, sugebantis gana efektyviai organizuoti šį procesą, teisingai panaudojantis įvairias mokymo formas ir metodus, nuolat susiduria su įvairiais prieštaravimais. Mokėjimas juos išryškinti, jų esmės supratimas, reikšmės įvertinimas dažnai sudaro galimybes juos laiku išspręsti ir netgi užkirsti kelią jiems atsirasti. Svarbiausi prieštaravimai yra susiję su: 1) mokymo tikslais; 2) mokymo proceso esme (pvz., tarp dėstymo ir savarankiško mokymosi); 3) mokymo turiniu (gausi nauja informacija ir ribotas mokymo laikas); 4) sąvokų formavimo procesu (pvz., tarp konkrečių vaizdinių ir abstrakčių sąvokų); 5) mokymo metodais (pvz., tarp mokytojo vadovaujančio vaidmens ir mokinių savarankiškos veiklos); 6) mokymo formomis (pvz., tarp klasinės-pamokinės ir individualizuoto mokymo formų).

Dabar ypač aštrus prieštaravimas pasireiškia tarp dviejų mokymo proceso tipų: aiškinamojo ir probleminio. Aiškinamojo mokymo atveju mokiniai turi suvokti mokymosi tikslus, o po to įsisavinti atitinkamą žinių sistemą. Žinios jiems pateikiamos gatavos iš įvairių šaltinių: mokytojo aiškinimo, vadovėlio, kompiuterio ekrano, mokomojo kino filmo ir t. t. Mokinys žinias įsisavina, įtvirtina, išsiugdo jų taikymo mokėjimus bei įgūdžius ir iš nežinojimo būklės pereina į žinojimo būklę – t. y. išsprendžiamas pagrindinis mokymo prieštaravimas. Tačiau neišreikštine forma šis prieštaravimas toliau egzistuoja, nes mokiniai nebuvo pakankamai aktyvūs šio prieštaravimo sprendimo dalyviai. Antruoju atveju šis prieštaravimas – ryškus mokymo pažintinės veiklos stimulas, susietas su savarankišku (ar vadovaujant mokytojui) mokomųjų tiriamųjų užduočių atlikimu. Čia mokiniai yra aktyvūs ir sąmoningi nagrinėjamojo prieštaravimo sprendimo proceso dalyviai, nes prieštaravimo supratimas, nagrinėjimas ir sprendimas sudaro bet kurios tiriamosios užduoties sprendimo esmę.

Mokymo dinamiškumas, būtinumas nuolat keisti mokomųjų užduočių sunkumo lygį atsižvelgiant į mokinių individualias ypatybes dažnai gimdo populiarų prieštaravimą tarp menamo ir tikrojo vienų ar kitų mokymo priemonių įvertinimo. Bet kuris mokymo metodas, forma, priemonė kintančiomis sąlygomis dažnai ne tik netenka savo veiksmingumo, bet ir virsta savo priešybe. Pvz., palengvintos matematinės užduotys silpniesiems mokiniams, iš pradžių stimuliuojančios jų mokymosi veiklą, vėliau gali stabdyti jų mokymąsi.

2.6. Apie matematikos mokymo formas ir metodus

Šiuolaikinis mokslo ir technikos lygis reikalauja iš darbuotojo ne tik atitinkamos veiklos sferos žinių, mokėjimų bei įgūdžių, bet ir gebėjimo spręsti įvairius, kartais visiškai naujus, uždavinius kintančiomis sąlygomis ar net savarankiškai formuluoti tokius uždavinius, t. y. atitinkamo kūrybinio aktyvumo.

Reikia pažymėti, kad mokymo programos turinys neturi lemiamos reikšmės mokinių matematinei veiklai. Lemiamą reikšmę turi mokymo metodai. Matematikos didaktikoje (ir apskritai didaktikoje) mokymo metodų problema vienareikšmiškai nėra išspręsta. Yra nemaža bandymų klasifikuoti mokymo metodus, pasirenkant įvairius klasifikacijų pagrindus (pagal mokytojo ir mokinių veiklos pobūdį, žinių šaltinius ir t. t.). Kartu stebimas mokymo formų ir metodų painiojimas (pvz., vieni autoriai paskaitą laiko mokymo forma, kiti – metodu). Tai nestebina, nes kol kas nėra nei itin tikslios mokymo metodo sąvokos, nei jų klasifikacijos. Prieš ją atliekant, būtina tiksliai apibrėžti, kas tai yra – mokymas mokykloje. Tai ne tik žinių perteikimas mokiniams, o sudėtingas mokytojo ir mokinių efektyvios tarpusavio sąveikos procesas. Būtina pabrėžti, kad mokymas – bendra mokytojo ir mokinių veikla esant vadovaujančiajam mokytojo vaidmeniui. Mokant yra dvi ryškios pusės: *mokymas* ir *mokymasis*. Mokymas – mokytojo veikla, kuri pasireiškia mokomosios medžiagos dėstymu, stebėjimu, žinių įsisavinimo bei taikymo organizavimu, įgautų mokėjimų ir įgūdžių tikrinimu. Mokymasis – sąmoninga mokinių veikla vadovaujant mokytojui, pasireiškianti tuo, kad mokiniai suvokia jiems teikiamą mokomąją medžiagą, klausydamiesi mokytojo aiškinimų, įprasmindami nagrinėjamus faktus, objektus, reiškinius ir ryšius tarp jų, o apibendrindami visa tai pagal mokytojo pateiktas užduotis taiko ir įtvirtina įgytas žinias.

Taigi mokymo metodai yra dviejų rūšių – *žinių perteikimo* ir *mokymosi*. Tačiau mokymo metodai nėra mechaninė šių dviejų metodų grupių suma. Mokymas – tai organiška žinių perteikimo bei jų įsisavinimo vienovė, t. y. taikant mokymo metodus būtina sukurti tokias situacijas, kuriose žinios būtų ir perteikiamos, ir įsisavinamos. Ypač pabrėžtina yra tai, kad mokymo metodai turi atitikti mokinių intelektinio išsivystymo lygmenį ir skatinti eiti toliau.

Dabar mokymo metodo sąvoka remiasi mokymo proceso, kaip valdomo pažinimo proceso, supratimu. Tad mokymo metodai turi būti nagrinėjami kaip mokinių pažintinės veiklos organizavimo būdai, užtikrinantys žinių kaupimą, pažinimo ir praktinės veiklos metodų įvaldymą. Taigi *mokymo metodas* – žinių perteikimo ir mokinių pažintinės bei praktinės veiklos organizavimo būdas, kuris padeda įsisavinti žinias, mokėjimus bei įgūdžius ir pažinimo metodus, formuoti mokinio asmenybę.

Labai svarbi problema – mokslinio tyrimo metodų taikymas mokantis matematikos. Mokymasis vyksta ne vien dalyko dėstymo procese. Kartais dalyko dėstymas net trukdo aktyviam mokymuisi. Tai keičia ir mokytojo vaidmenį. Jei anksčiau mokytojas buvo pagrindinis mokomosios informacijos šaltinis mokiniams, tai šiuo metu taip nebėra. Tad pagrindinis mokytojo uždavinys dabar – specialus mokomųjų situacijų kūrimas siekiant perteikti būtiną mokiniams mokomąją informaciją taip organizuojant savarankišką mokinių veiklą, kurios procese jie įgytų tą informaciją natūralesniu žmogui – savimokos keliu. Taigi mokytojo darbas tampa individualesnis, kūrybiškesnis, ne vien mokytojas dabar turi mokyti matematikos, bet ir mokiniai, mokytojui sukūrus atitinkamas situacijas, savarankiškai ar bendradarbiaudami tarpusavyje bei su mokytoju, mokosi ir įvaldo atitinkamą matematinių žinių, mokėjimų bei įgūdžių sistemą. Mokytojas visa savo veikla turi siekti įgyvendinti šį tikslą. Savarankiško mokymosi teigiamybės abejonių nekelia. Tačiau realiame matematikos mokymo procese ne visada galima (o ir didaktine prasme ne visada tikslinga) remtis vien savarankišku mokinių darbu. Daugelis matematikos mokyklinio kurso klausimų reikalauja ne tik mokymosi, bet ir labai griežto, tikslaus išmokimo (pvz., veiksmų atlikimo algoritmai). Tad mokomajai mokytojo veiklai turėtų būti būdinga tik minimizacijos, o mokinių savarankiškai mokymosi veiklai – optimizacijos tendencija.

Mokslinio tyrimo metodai skirstomi į: a) *jutiminius*; b) *teorinius*; c) *turininguosius* ir d) *formaliuosius loginius*. Tai sistema būdų, dėsnių, mokėjimų ir įgūdžių, skatinančių naudotis tokiomis mąstymo operacijomis, kaip objektų stebėjimas, veiksmai su jais, lyginimas, analizė ir sintezė, apibendrinimas ir specializacija, abstrahavimas ir konkretinimas.

Pažinimo ir mokymo procesas gali būti dviejų lygių: 1) pojūčių, suvokimo ir vaizdinių; 2) sprendimų ir išvadų.

Pirmasis lygis – tik išorinių, esminių nagrinėjamų objektų požymių pažinimas, o antrasis leidžia pažinti vidinius esminius tų pačių objektų požymius. Kai kurios aukščiau aptartos mąstymo operacijos vartojamos tik vienu pažinimo lygiu, kitos – abiem. Pvz., stebėjimas taikomas tik pirmu lygiu, apibendrinimas, abstrahavimas, konkretinimas – tik antru, o lyginimas, analizė ir sintezė – abiem lygiais.

Pirmuoju pažinimo lygiu mokinio suvokimas yra visuminis (apimamas visa objektas), t. y. turima pirminė sintezė. Toliau mokinys remiasi analize (mintyse objektas išskaidomas į jį sudarančias dalis). Pagaliau mokinio mąstyme ima reikštis antrinė sintezė (susidaro objekto vaizdinys). Antrasis lygis – kai objektas toliau nagrinėjamas einant nuo analizės prie sintezės, arba atvirkščiai.

Bendroji mokymo metodų klasifikacija atliekama remiantis *skirtybėmis tarp mokytojo ir mokinių veiklos*. Šiuo pagrindu išskiriame: 1) *dėstymo metodus* (mokytojo veikla) – informacijos perteikimo ir mokinių tiriamosios veiklos valdymo metodai; 2) *mokymosi metodus* (mokinių veikla). Šioje klasifikacijoje svarbiausi yra antrosios grupės metodai, nes jie yra paties mokymo proceso tikslas ir padeda užtikrinti mokomosios medžiagos įsisavinimą.

Dėstymo metodai – tam tikros matematinių žinių, mokėjimų ir įgūdžių sistemos perteikimo mokiniams būdai. Jie vartojami, kai mokiniai turi išmokti veikti pagal tam tikrus algoritmus, arba tada, kai medžiaga yra jiems labai nauja, sudėtinga ir savarankiškai jos įsisavinti jie nepajėgtų. Pagrindiniai dėstymo metodai yra: *pasakojimas, aiškinimas, pokalbis, treniruojamojo pobūdžio savarankiškas darbas, vadovavimas mokinių savarankiškam darbui su mokomąja literatūra.*

Mokymosi metodai – metodai, kurie buvo specialiai sukurti didaktikoje (*euristinis pokalbis, mokymas per modelius* ir kt.) tam, kad būtų galima efektyviai valdyti mokymą.

Taikydami įvairius mokymo metodus, neturime pamiršti nuoseklaus ir planingo specialių mokėjimų, leidžiančių sėkmingai mokytis matematikos, formavimo. Mokydamiesi matematikos mokiniai turi susiformuoti mokėjimus: a) išryškinti ir formuluoti mokomąsias problemas; b) atrinkti, įvertinti ir panaudoti informaciją, susijusią su atitinkama mokomąja problema (gebėjimas aktualizuoti žinias); c) išryškinti ir formuluoti kryptingas hipotezes, panašias į tiesą; d) įvertinti ir pagrįsti tas hipotezes, gaunamas išvadas ir apibendrinimus; e) planuoti savo veiklą ir realizuoti ją pagal susidarytą planą.

Kiekvieną dėstymo metodą turi atitikti atitinkamas mokymosi metodas, tik tokiu atveju dėstymo metodas gali būti laikomas mokymo metodu. Realiame mokymo procese šie metodai dažnai susilieja į vieningą visumą, pvz., pokalbyje. Labai svarbus yra euristinis mokymo metodas. Jam ir skirsime nemaža dėmesio.

2.7. Euristinis matematikos mokymo metodas

Euristinė veikla – tokia žmogaus mąstymo veikla, kuri sukuria naują veiksmų sistemą arba atskleidžia anksčiau nežinomus žmogui jį supančių objektų (ar nagrinėjamos mokslo srities objektų) dėsningumus. Pati euristinė veikla yra taikoma tokiems reiškiniams: a) kai ji padeda išspręsti sudėtingą, nestandartinį uždavinį; b) kai žmogaus sąmonėje jai vykstant susiformuoja tam tikro uždavinio sprendimo specifinis būdas ir daugiau ar mažiau sąmoningai perkeliamas į kitų uždavinių sprendimo procesą.

Euristinio metodo taikymo mokant matematikos pradžia siejama su prancūzų matematiko pedagogo K. A. Lezano (*Lesanne*) darbais. Jis pateikė tokius patarimus mokytojui: dėstymo procese laikytis žaidybinės situacijos sąlygų, palaikant vaikui iliuziją, kad jis savarankiškai atskleidžia vieną ar kitą matematinę tiesą, vengti perkrauti atmintį, mokyti remiantis interesu tam, ko mokoma [131, p. 2–3].

Rusų pedagogas S. Šochoras-Trockis nurodė, kad negalima dėstyti medžiagos gatavu pavidalu. Taip elgtis – reiškia eiti prieš pagrindinius mokymo principus. Iš dalies jis nurodė, kad „geometrijos užsiėmimai gali būti mokiniams įdomūs tik tada, kai jie reikalauja jo jėgas atitinkančio ir planingo darbo <...>, reikalauja protinio darbo, o ne mintinio žodžių mokymosi“ [148, p. 14].

Euristinės veiklos vaidmuo moksle ir mokant matematikos smulkiai nušviečiamas D. Poja darbuose. Euristiką jis apibūdino kaip specialią mokslo sritį. Jos tikslas – tirti taisykles ir metodus, kuriuos taikant daromi išradimai ir atradimai. Pagrindinis metodas, kuriuo naudojantis galima išnagrinėti kūrybinio mąstymo proceso struktūrą yra, jo nuomone, asmeninio patyrimo sprendžiant uždavinius tyrimas ir stebėjimas, kaip uždavinius sprendžia kiti. D. Poja bandė suformuluoti tam tikras taisykles, kuriomis naudojantis galima atlikti išradimą, tačiau psichinės veiklos, kuriai siūlomos šios taisyklės, neanalizuoja. O tos taisyklės yra tokios: 1) reikia turėti gebėjimų, kartu turi ir sektis; 2) tvirtai laikytis ir neatsitraukti, kol nepasirodys sėkminga idėja. Uždavinio sprendimo schema yra tokia: 1) uždavinio formulavimo supratimas; 2) sprendimo plano sudarymas; 3) plano realizavimas; 4) žvilgsnis atgal (sprendimo nagrinėjimas). Uždavinį sprendžiantis asmuo spręsdamas turi atsakyti į klausimus: a) kas nežinoma? b) kas duota? c) kokia yra sąlyga? d) ar anksčiau nepasitaikė panašaus uždavinio, nors ir pateikto truputį kita forma? e) ar yra koks nors uždavinys tarp mano spręstųjų giminingas šiam? f) ar negalima pasinaudoti tuo uždaviniu? [137]. Nesunku pastebėti, kad D. Poja pabrėžė vieną euristinės veiklos principų – turimo patyrimo panaudojimą.

D. Poja pažiūroms artimos Dž. Brunerio pažiūros. Jis euristinius sprendimo būdus apibūdino kaip tam tikrus ne itin tikslius uždavinių sprendimo būdus, kuriuos naudojant galima pasiekti norimą rezultatą, bet gali būti ir atvirkščiai. Dž. Bruneris sąvoką „euristinis“ traktuoja, kaip ir D. Poja, apibūdinimą būdų, padedančių išspręsti uždavinį [114, 118].

V. Sojeris rašė: „Kiekvienam matematikui nesvetimas **proto užmojis**. Matematikas nemėgsta, kada jam kas nors apie ką nors pasakoja, jis nori viską atrasti pats“ [140, p. 25]. Tas užmojis būdingas ir vaikams: „Jei jūs <...> dėstote geometriją 9–10 metų vaikams ir pasakojate, kad niekas dar nesugebėjo padalyti kampo į tris lygias dalis, naudodamasis liniuote ir skriestuvu, jūs būtinai pamatysite, kad vienas ar du berniukai liks po pamokų klasėje ir bandys rasti sprendimą. Ta aplinkybė, kad per 2000 metų niekas nesugebėjo išspręsti šio uždavinio, jiems netrukdo tikėtis, kad tai jie padarys <...> per pertrauką. Tai, aišku, ne itin kuklu, bet ir nėra savęs pervertinimas. Jie paprasčiausiai yra pasirengę priimti bet kurį iššūkį. O juk iš tiesų yra seniai įrodyta, kad neįmanoma padalyti kampą į tris lygias dalis su liniuote ir skriestuvu. Jų bandymas rasti sprendimą yra toks pats, kaip bandymas išreikšti $\sqrt{2}$ racionaliąja trupmena $^{p}/_{q}$.

Geras mokinys visada stengiasi užbėgti į priekį <...>. Štai šis troškimas yra matematiko skiriamasis bruožas. Tai viena iš jėgų, padedančių augti matematikui. Matematikas junta pasitenkinimą žiniomis, kurias jis jau įvaldė, ir visada siekia naujų žinių <...>. Kita būtina matematiko savybė yra interesas dėsningumams. Dėsningumas – tai labiausiai stabili nuolat kintančio pasaulio charakteristika. Šiandiena negali būti panaši į vakarykštę dieną. Negalima pamatyti du kartus vieną ir tą patį veidą tuo pačiu regėjimo kampu. Dėsningumų pasitaiko jau pačioje aritmetikos pradžioje. Daugybos lentelėje yra nemažai elementarių dėsningumų pavyzdžių. Paprastai vaikai mėgsta dauginti iš 2 ir 5, nes paskutinius atsakymo skaitmenis lengva įsiminti: dauginant iš 2 visada gaunami lyginiai skaičiai, o dauginant iš 5, dar paprasčiau, sandauga baigiasi visada 0 ar 5. Bet netgi dauginant iš 7 yra savų dėsningumų. Jei mes peržiūrėsime sandaugų 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70 paskutinius skaitmenis <...> ir perskaitysime paskutinius skaitmenis atvirkštine tvarka, tai gausime sandaugų iš 3 paskutinius skaitmenis" [140, p. 25–27].

Taigi vienas iš pagrindinių metodų, leidžiančių mokiniams parodyti kūrybinį aktyvumą mokantis matematikos yra euristinis metodas. Jo esmė trumpai nusakoma taip: mokytojas klasėje suformuluoja kokią nors mokomąją problemą, o po to specialiai parinktais uždaviniais padeda mokiniams savarankiškai atrasti vieną ar kitą matematinį faktą. Mokiniai palaipsniui, žingsnis po žingsnio nugali sunkumus spręsdami iškeltą problemą ir suranda jos sprendimą.

Yra žinoma, kad mokiniai mokydamiesi matematikos susiduria su įvairiais sunkumais. Tačiau taikant euristinį metodą šie sunkumai tampa papildomu mokymosi stimulu (lot. „*stimulus*" – paskata). Jei mokinys pajunta, kad jo žinių nepakanka uždaviniui išspręsti ar teoremai įrodyti, tai jis pats stengiasi užpildyti šią spragą, savarankiškai atrasdamas vieną ar kitą savybę ir tada pamato jos naudingumą. Tad mokytojas turi darbą organizuoti taip, kad sunkumai, kurie iškyla mokiniams, atitiktų jų jėgas.

Euristinio metodo taikymas teigiamai veikia mokinių požiūrį į mokymąsi. Savarankiški atradimai labai sustiprina interesą mokytis.

Tačiau euristinis metodas reikalauja labai didelių tiek mokytojo, tiek mokinio laiko sąnaudų. Visą mokymą organizuoti remiantis tik šiuo metodu neįmanoma – tam neužtektų viso mokymosi mokykloje laiko. Be to, vienas mokymo metodas nusibostų ir mokiniams. Todėl euristinis metodas taikytinas tik esminiams, fundamentiniams klausimams perteikti (pvz., trikampio vidaus kampų didumų suma, Pitagoro teorema). Kituose skyreliuose apžvelgsime šio metodo praktinio įgyvendinimo būdus.

2.8. Euristinio metodo praktinio įgyvendinimo būdai

2.8.1. Euristinis pokalbis

Kad mokiniai išmoktų įrodinėti, reikia suteikti jiems galimybę ne tik klausyti ir įsiminti gatavus įrodymus, bet ir aktyviai dalyvauti atliekant įrodymus. Taigi reikia taip organizuoti pedagoginį procesą, kad mokiniai turėtų galimybę ieškoti sprendimo kelių ir juos rasti, kad jie jaustųsi kūrėjais, darančiais atradimus. Pirmasis tam padedantis metodas yra *euristinis pokalbis*. Jo esmė: mokytojas klasėje iškelia problemą (suformuluoja teoremą, pateikia uždavinį), o po to pateikdamas tikslingus klausimus veda mokinius teisingu keliu. Mokiniai atlieka vienas po kito įrodymo ar sprendimo žingsnius. Klausimai pateikiami visai klasei; atsakymus duoda mokytojo pasirinkti mokiniai. Taip kolektyvinėmis pastangomis gaunamos reikalingos išvados. Todėl euristinio pokalbio metodas – kolektyvinio darbo metodas, taikomas vadovaujant mokytojui. Tačiau tai netrukdo, o priešingai – leidžia kiekvienam mokiniui dalyvauti įrodinėjant teoremą ar sprendžiant uždavinį. Praktika liudija, kad šis metodas sužadina daugelio mokinių aktyvumą. Mokytojas turi stengtis į aktyvią veiklą įtraukti visus mokinius. Galimybė aktyviai dalyvauti kolektyviniame darbe leidžia daugeliui mokinių palaipsniui susiformuoti mokėjimus bei įgūdžius pagrįsti teoremų įrodymus, spręsti uždavinius. Gyvas dialogas, aktyvus dalyvavimas įrodinėjant teoremą ar sprendžiant uždavinį, galimybė pareikšti iniciatyvą, panaudoti kūrybos elementus – visa tai kelia susidomėjimą pamokomis, matematika, skatina meilę jai.

Pokalbis, kuriame iš mokinių reikalaujama duoti išsamius atsakymus į klausimus, teisingai formuluoti mintis, daryti išvadas, padeda vystytis trumpai, tiksliai, turtingai kalbai, o su ja – ir mąstymui.

Euristinis pokalbis efektyviausias, kai atliekama mūsų aukščiau aptarta kylančioji analizė. Čia perėjimas nuo vieno prie kito etapo yra natūralus, visa įrodymo ar sprendimo struktūra – logiškai būtina. Pokalbyje analizė natūraliai pereina į sintezę, kur tai reikalinga.

Jei norime naudotis sintetiniu mokymo būdu, geriau yra sieti mokyklinę paskaitą ir euristinį pokalbį. Jis dažnai siejamas ir su demonstraciniu, laboratoriniu metodais.

2.8.2. Reikalavimai euristinio pokalbio klausimų sistemai

Euristinio pokalbio taikymo pamokoje sėkmė labai priklauso nuo mokytojo parengtos klausimų sistemos. Aukšta bendroji ir matematinė kultūra, išradingumas, gyva kalba, mokėjimas trumpai, paprastai ir aiškiai formuluoti klausimus, o jei reikia – sugebėti greitai juos pakeisti, suformuluoti kitaip – tokios mokytojo savybės užtikrina sėkmingą šio metodo taikymą. Reikalavimai mokytojo klausimams yra tokie: 1) klausimų sistema turi pasižymėti loginiu nuoseklumu, kurį apibrėžia mokomosios medžiagos turinys ir pasirinktas jos perteikimo metodas; 2) klausimai turi sukurti pakankamą erdvę mokinių mąstymui, t. y. priklausomai nuo atsakymo sudėtingumo gali būti įvairūs intervalai tarp klausimų; būtina atsižvelgti į mokinių amžių; apskritai klausimai turi būti pakankamai sudėtingi, bet įkandami, prieinami vidutiniam mokiniui; 3) klausimai turi būti suformuluoti trumpai ir aiškiai, nes tai būtina mokinių minčiai nukreipti tuo keliu, kuris reikalingas įrodymui ar sprendimui plėtoti; reikia vengti neapibrėžtų klausimų („Ką galima pasakyti apie ...?“); 4) žodis, ant kurio krenta loginis kirtis, turi būti pateiktas klausimo pradžioje („Kodėl ...“?); 5) vengti sudėtinių klausimų – dvigubi ar trigubi klausimai dezorganizuoja mokinių mąstymo eigą, lėčiau gaunamas teisingas atsakymas; 6) reikia vengti pasakančiųjų klausimų; viena jų forma – alternatyvus pasirinkimas (taip – ne ir pan.); 7) klausimas pateikiamas visai klasei, reikalaujama, kad atsakymus rengtų kiekvienas mokinys; 8) jei atsakymo nesulaukiama, tai klausimas buvo per sunkus ir tada: a) reikia suskaidyti jį į paprastesnius; b) kartais prireikia jį perfrazuoti, panaudojant paprastesnę žodinę išraišką; c) kraštutiniu atveju – atsakyti pačiam mokytojui.

Reikalavimai mokinių atsakymams: 1) atsakinėti turi būti pasirengę visi; į vieną klausimą dažnai prašoma atsakyti 2-3 mokinius ir nebūtinai tuos, kurie kelia rankas; 2) atsakymai turi būti išsamūs ir tikslūs, suprantami visiems mokiniams.

2.8.3. Ypatingoji euristinio pokalbio forma

Jos esmė: mokytojas iškelia problemą, pasiekia, kad kiekvienas mokinys suvoktų siūlomą įrodyti teoremą ar išspręsti uždavinį ir pasiūlo tai atlikti savarankiškai. Po to aptariami mokinių siūlomi variantai, priimamas teisingas. Kritika ir klaidingų variantų atmetimas yra labai naudingi – tai vysto mokėjimą surasti klaidas, skatina norą ieškoti ir surasti teisingus įrodymus ar sprendimus. Silpnoji šio metodo pusė: sunku nustatyti, ar visi mokiniai įsitraukė į darbą, tačiau vis tiek visi bus priversti išklausyti teisingus variantus.

2.8.4. Euristinio pokalbio ir matematikos laboratorinių darbų derinimas

Laboratorinių darbų metu mokiniai dirba su daiktais ar jų modeliais, naudojasi matavimo prietaisais. Jie skirstomi į dvi rūšis: 1) vienų laboratorinių darbų tikslas – supažindinti su matematiniais faktais, dėsningumais; 2) kiti darbai skirti žinioms taikyti, mokėjimams ir įgūdžiams formuoti.

Pirmosios rūšies laboratoriniai darbai yra daugiau tiriamojo pobūdžio. Kiekvienas toks darbas atliekamas maždaug taip: a) mokytojas trumpai suformuluoja užduotį mokiniams ir pateikia instrukciją, kaip ją atlikti; b) mokiniai individualiai ar nedidelėmis grupėmis (gali ir poromis) dirba su išdalytais jiems objektais, naudodamiesi reikalingais matavimo prietaisais; šio darbo tikslas – sukaupti faktus, kurie leis rasti bendrą dėsningumą; c) darbas baigiamas kolektyviniu jo rezultatų aptarimu vadovaujant mokytojui ir suformuluojant galutinę išvadą. Darbo metu mokiniai naudojasi keliais jutimo organais, jame yra euristinis – paieškos elementas, naujų mokiniams faktų atradimas, visa tai sukelia mokinių aktyvumą, palaiko darbingumą, žadina interesą matematikai. Sisteminiame geometrijos kurse tokie laboratoriniai darbai padeda suformuluoti teoremas nepilnosios indukcijos būdu, o po to jos įrodomos dedukciniu būdu.

Tam tikras euristinis elementas yra ir antrosios rūšies darbuose. Šios rūšies atmaina – matavimai vietovėje, kur matematika taikoma jau ne modeliams, o realiems objektams – erdvinėms formoms ir kiekybiniams santykiams.

2.9. Aktyvaus matematikos mokymo metodas (mokymas naudojantis modeliais)

Šveicarų psichologas Ž. Pjažė buvo pirmasis psichologas, kuris pastebėjo, kad išsamių matematinių sąvokų formavimas remiasi tuo, kad mokiniai turi apibrėžtas proto struktūras ir kad bet kuri matematinė sąvoka vaiko mąstyme neapsiriboja grynąja logika, o gimsta kaip loginių-operacinių struktūrų sintezė, o šios struktūros susiformuoja vystantis organiniam ryšiui tarp vidinių mąstymo operacijų, efektyvios išorinės veiklos ir konkrečios mokomosios medžiagos. Pagal Ž. Pjažė koncepciją intelektinė mokinio veikla glaudžiai siejasi su jo veiksmais, kuriuos jis atlieka su jį supančiais daiktais. Tai ir padeda vaikui pereiti iš jutimų pasaulio į abstrakcijų pasaulį [114, 145]. Ž. Pjažė teigė, kad „Kiekvienas normalus vaikas geba tiksliai matematiškai mąstyti, jeigu jo asmeninė iniciatyva įsikūnija žaidimo forma“ [145, p. 47]. Tad tradicinio mokymo nesėkmė susijusi ne su mokinio gebėjimų nebuvimu, o su jo emocijų blokavimu, nes matematikos mokymas labai dažnai prasideda nuo žodinių aiškinimų, o ne nuo praktinių veiksmų. Taigi matematinės sąvokos jų pradinio formavimo stadijoje turi būti sudaromos per pojūčius; stebėjimai ir veiksmai su konkrečiais objektais padeda paversti pojūčius abstrakčiomis, apibendrintomis struktūromis. Tad rėmimasis konkrečiu vaizdumu mažiau turi reikšmės nei iliustravimas, o daugiau reikšmingas kaip operatyvinis darbas, sudarantis palankias sąlygas formuotis abstrakčioms matematinėms sąvokoms. Psichinė veikla yra perdirbta išorinė, praktinė veikla.

Rusų psichologas Piotras Galperinas (1902–1988) teigė, kad kiekvienas praktinis veiksmas iš pradžių neišvengiamai pereina veikimo su daiktu ar jo pakaitalu (vaizdine priemone) etapą. Jo metu pažįstamos ir išskiriamos principinės, charakteringos nagrinėjamo objekto savybės, tik po to, dar perėjus kalbos ir vidinės kalbos etapus, veiksmas iš tiesų tampa protinis [122].

Tai toks ir yra psichologinis aktyvaus mokymo metodo pagrindas.

Taigi pedagoginė psichologija reikalauja iš vaiko aktyviai atlikti daiktines operacijas, savarankiškai formuluoti hipotezes ir išvadas. Dar Janas Amosas Komenskis (*Komensky*, *Comenius*, 1592–1670) rašė, kad „žmones reikia mokyti kiek galima imti išmintį ne iš knygų, bet iš dangaus ir žemės, iš ąžuolų ir skroblų – reikia mokyti pažinti ir tyrinėti pačius daiktus, o ne svetimas pastabas ir nuomones apie juos. Jeigu sems žinojimą ne iš kur kitur, o iš pačių daiktų <...> – bus ženklas, kad žmonės vėl įstojo į senovės išminčių kelią“ [88, p. 199]. Taigi, kad suaktyvintume matematikos mokymą, mes turime mokiniams organizuoti įvairius stebėjimus, bandymus, laboratorinius darbus, pagrįstus konkrečia, gyvenimiška medžiaga. Bet ne visada galima pasinaudoti aplinkoje esančiais objektais, todėl reikalingos ir vaizdinės priemonės. Jos gali būti suskirstytos į tris grupes.

1. Modeliai, kuriuos galima rasti aplinkoje (taško, tiesės, plokštumos, paviršiaus, stataus kampo ir t. t.). Tokių modelių paieška – labai naudinga mokiniams, nes leidžia plačiau traktuoti daugelį sąvokų.

2. Mokinių gamintos vaizdinės priemonės. Jau pats gaminimo procesas mokiniams yra įdomus. Jis labai naudingas norint geriau įsisavinti žinias, palengvina apibrėžimų formulavimą, teoremų įrodymą, uždavinių sprendimą.

3. Mokytojų ir fabrikų gamintos vaizdinės priemonės. Jų arsenalas labai platus: nuo plakatų, modelių iki kompiuterinių mokomųjų programų.

Šiuo metu daug rašoma apie aktyvaus mokymo metodus [58, 59, 84]. Išsamesnė tokių darbų analizė atskleidžia, kad tie metodai – įvairios euristinio pokalbio ar savarankiško darbo atmainos, jų deriniai su kitais metodais.

2.10. Pagrindiniai tradiciniai matematikos mokymo metodai

Vienas iš gana efektyvių matematikos mokymo metodų yra *pokalbis*. Dar K. Ušinskis rašė: „Manome, kad mechaninėms kombinacijoms paversti intelektinėmis geriausiai tinka bet kurio amžiaus žmonėms, o ypač vaikams, Sokrato vartotas metodas, kuris dėl to ir pavadintas *sokratiniu*. Sokratas neprimesdavo savo minčių klausytojams; tačiau žinodamas, kokios prieštaringos minčių ir faktų eilės guli viena šalia kitos jų <...> galvose, jis *klausimais* ištraukdavo tas prieštaringas eiles į šviesią sąmonės sritį ir tokiu būdu priversdavo jas arba susidūrus suardyti viena kitą, arba susitaikyti trečiojoje, jas jungiančioje ir išaiškinančioje mintyje <...>. Jeigu mokytojas nori, kad vaikas *aiškiai* suprastų ir iš tikrųjų *įsisavintų* kurią nors naują *mintį*, tai geriausiai tai pasieks sokratiniu būdu“ [109, p. 397]. Taigi aukščiau aptartas euristinis metodas turi geras ir gilias šaknis.

Kad efektyviai išdėstytų mokomąją medžiagą pokalbio metodu, mokytojas turi gerai pasirengti jo vedimui: kruopščiai išnagrinėti mokomąją medžiagą, įvertinti jos ypatybes, tiksliai išsiaiškinti mokymo tikslą, nustatyti, ką jau mokiniai moka ir žino iš tos srities, kuri pravers nagrinėjant naują medžiagą, numatyti pokalbio vietą ir laiką pamokoje. Reikia suformuluoti visus numatomus klausimus (pagrindinius ir papildomus). Jaunam mokytojui rekomenduojama užsirašyti ir pageidaujamus mokinių atsakymus į tuos klausimus. Būtina numatyti ir parengti vartojimui reikalingas mokymo priemones. Numatoma klausimų sistema turi apimti visą nagrinėjamą temą. Patys klausimai turi: būti trumpi ir aiškūs, skatinti mokinių interesą, patraukti kiekvieno mokinio dėmesį, stimuliuoti mokinių mąstymą. Kaip ir minėjome aukščiau, klausimai neturi būti pasakomieji ir nesiūlyti alternatyvinio pasirinkimo. Pokalbio pabaigoje mokytojas turi apibendrinti jo rezultatus. Po to naudinga spręsti treniruojamojo pobūdžio pratimus ar uždavinius. Sprendimo metu išryškės dar esančios spragos mokinių žiniose ir bus įtvirtinti pagrindiniai faktai tos mokomosios medžiagos, kuri buvo išdėstyta pokalbio metodu.

Mokytojo pasakojimas irgi turi skatinti mokinius aktyviai protinei veiklai, žadinti jų interesą matematikai. Suvokdami mokytojo pasakojimą, mokiniai turi kartu su juo mintimis ieškoti nagrinėjamų matematinių faktų pagrindimo ir galimų jų taikymo būdų. Pasakojimą mokytojas turi kurti taip, kad atskleistų mokiniams savo mąstymo kelią, pademonstruotų jiems patį ieškojimą kelių, kurie padeda išvesti įvairias formules, įrodyti teoremas, o ne vien dėstytų gatavus matematinius faktus. Todėl pasakojimas turi skirtis nuo vadovėlio teksto ir turi būti nuolat palydimas mokytojo klausimų: „Kodėl? Kuo remiantis? Ko reikia, kad nustatytume šį faktą? Kaip tai padaryti? Ar negalima tai padaryti kitaip? Nuo ko pradėti?“ ir t. t. Žinodamas, kad į daugelį klausimų mokiniai atsakyti nesugebės, mokytojas atsako į juos pats, tačiau tai vis tiek aktyvina mokinius. Pasakojimas turi būti mokiniams matematinio dėstymo stiliaus etalonas.

Savarankiškas mokinio darbas su vadovėliu irgi yra svarbus tradicinis mokymo metodas. Reikia turėti omenyje, kad vadovėlio skaitymas suprantant tekstą ir mokėjimas atpasakoti tą perskaitytą tekstą yra tik pirmoji mokėjimo dirbti su mokomąja literatūra pakopa. Aukštesnėje pakopoje mokiniai turi gautos iš vadovėlio informacijos pagrindu ateiti prie naujų žinių, tiesiogiai nepateiktų vadovėlyje, o atsirandančių kaip rezultatas produktyvių svarstymų apie tai, kas buvo perskaityta. Kad mokiniai išmoktų dirbti su vadovėliu, reikia jiems pateikti atitinkamas rekomendacijas. Štai kaip jas galima formuluoti.

1. Mokantis užduotą skyrių iš vadovėlio, reikia po ranka turėti popieriaus ir rašymo priemonę.

2. Įdėmiai perskaityti visą vadovėlio skyrių ir stengtis išskirti tas jo dalis, kurios turi savarankišką reikšmę (pagrindinių sąvokų apibrėžimai, teoremos, pavyzdžiai, brėžiniai ir t. t.). Pirmojo skaitymo metu svarbu suprasti tik pagrindinę teksto mintį, neaiškias detales galima laikinai praleisti.

3. Nagrinėjant kiekvieną iš išskirtųjų dalių, įsidėmėti tai, kas joje svarbiausia.

4. Antrą kartą skaitant reikia atkreipti dėmesį į visas detales.

5. Po to, kai vadovėlio skyrius yra suprastas, reikia pabandyti 1–2 kartus atgaminti tai, kas perskaityta.

6. Ypatingą dėmesį atkreipti į tai, kas skyriuje yra svarbiausia, ką reikia tvirtai įsiminti (apibrėžimai, teoremos, formulės), perskaityti juos keletą kartų ir stengtis atgaminti visa tai teisingai, Naudinga susidaryti perskaityto teksto planą ir pasistengti jį įsiminti.

7. Jei nagrinėjamos teorijos skyrelis remiasi iliustraciniais pavyzdžiais, juos reikia kruopščiai išnagrinėti.

8. Įsisavinus teoriją, reikia imti spręsti namų darbams paskirtus pratimus ir uždavinius taikant įsisavintas žinias.

9. Baigus darbą pagalvoti, ar negalima atitinkamos teoremos įrodyti kitaip.

10. Jei nagrinėtame skyrelyje visko nepavyko suprasti, reikia pasižymėti tai, kas buvo nesuprasta, ir būtinai kreiptis į mokytoją. Jokiu būdu nesigėdyti to, kad kažko nepavyko suprasti. Negalima palikti klausimo neišsiaiškinus: matematikoje kiekvienas naujas žinių elementas remiasi ankstesnėmis žiniomis ir yra reikalingas naujosioms žinioms įsisavinti.

Treniruojamojo pobūdžio savarankiški darbai padeda įtvirtinti matematines žinias, ugdo gebėjimus pritaikyti šias žinias atitinkamiems įgūdžiams formuoti. Praktiškai beveik kiekvienoje pamokoje dalis jos laiko skiriama tokios rūšies darbams. Jų užduotys – pratimai ar uždaviniai, atliekami pagal pavyzdį, o taip pat išvestų formulių, įrodytų teoremų pakartotinis savarankiškas išvedimas ar įrodymas. Tokio darbo metu mokytojas prieina prie mokinių, suteikdamas jiems būtiną individualią pagalbą. Tokio tipo darbai turi būti įveikiami vidutiniams mokiniams, jų užduotys išdėstomos sunkėjančia tvarka, paskutinės turi būti skirtos stipresniesiems mokiniams, kiti jų gali nespėti atlikti ar jos gali būti jiems ir per sunkios. Treniruojamųjų savarankiškų darbų užduotis reikia palaipsniui sunkinti. Antai kartu su mokytoju išmokus išvesti bendrojo pavidalo kvadratinės lygties šaknų suradimo formulę galima pabandyti pasiūlyti išvesti redukuotosios kvadratinės lygties šaknų suradimo formulę.

Didelę reikšmę mokant matematikos turi įvairūs *praktiniai ir laboratoriniai darbai*: l) grafiniai pratimai; 2) matavimai vietovėje; 3) modeliavimas; 4) skaičiavimai su skaičiuotuvais ir t. t.

Reikia pažymėti, kad skatinimas aktyvinti savarankišką mokinių veiklą, taikyti euristinius mokymo metodus negali būti suprastas kaip visiškas atsisakymas nuo tradicinių aiškinamojo mokymo metodų. Jie kartais tiesiog būtini: daugelį teorinių teiginių, algoritmų mokiniams reikia įsiminti visam laikui, mokėjimai turi virsti tvirtais įgūdžiais. Todėl aiškinamasis ir euristinis mokymo proceso tipai vienas kitą papildys dar ilgai, o galbūt ir visada.

2.11. Probleminis matematikos mokymas

Viena iš naujesnių pedagoginių krypčių, pradėjusi formuotis apie XX a. pradžią, yra *probleminis mokymas*. Esminė jo sąlyga – mokinių tiriamoji veikla mokymo proceso metu, tačiau tam būtina jiems pateikti problemas, sukurti problemines situacijas. Dažniausiai elgiamasi trimis skirtingais būdais: 1) mokytojas tiksliai formuluoja problemą; 2) sukuriama situacija, kurioje iš mokinio reikalaujama pačiam suvokti ir suformuluoti šioje situacijoje slypinčią problemą; sukuriama situacija su daugiau ar mažiau apčiuopiama problema, bet, ją spręsdamas, mokinys turi savarankiškai atrasti naują, papildomą problemą. Beje, pasitaiko ir atvejų, kai, spręsdamas kokį nors uždavinį, mokinys savarankiškai atranda kokią nors problemą, mokytojo nenumatytą kuriant probleminę situaciją.

Naujos medžiagos perteikimas tradicinio aiškinamojo mokymo metu paprastai apsiriboja tuo, kad mokytojas išaiškina nagrinėjamojo klausimo esmę ir sprendžia su mokiniais uždavinius ar pratimus, įtvirtinančius tik ką išaiškintas žinias. Probleminis mokymas prasideda nuo probleminės situacijos sukūrimo, toliau vyksta savarankiškas kūrybinis darbas analizuojant šią situaciją – taip atrandamos naujos mokiniams savybės, dėsniai, formulės, sprendimo būdai ir t. t.

Probleminio ir aiškinamojo mokymo tipų lyginamąją charakteristiką, pateiktą rusų autorių kolektyvo parengtoje knygoje [127], pavaizduosime 13 lentelėje.

13 lentelė

Probleminis mokymas	Aiškinamasis mokymas
1. Mokiniai savarankiškai atranda kokioje nors mokomojoje situacijoje apibrėžtus vidinius prieštaravimus ar kai kurių faktinių duomenų nepakankamumą jai apibūdinti, t. y. atranda tos situacijos problemiškumą. 2. Mokiniai pagal savo galimybes savarankiškai išsiaiškina, kokie objektai, savybės ar santykiai yra jiems nežinomi (nepažinti) probleminės situacijos komponentai. 3. Mokiniai ir mokytojas išsiaiškina (iškelia) tikslingą užduotį, t. y. pateiktoji probleminė situacija virsta tam tikra mokomąja problema, reikalaujančia sprendimo. 4. Šios mokomosios problemos sprendimas: a) mokomoji problema paprastai turi konkretų sprendimą; tačiau ji gali pasirodyti duotomis sąlygomis ir neišsprendžiama bei gali paskatinti iškelti naują problemą, nuo kurios priklauso pirmosios sprendimas; b) problemą sprendžiant galimi natūralūs nukrypimai nuo pagrindinio klausimo, kyla šalutinių problemų, atsakymai gali būti nevienareikšmiški ar neapibrėžti; c) sprendžiant mokomąją problemą gali paaiškėti, kad mokinio turimų žinių, mokėjimų ir įgūdžių atsargos nepakanka, prireikia naujų žinių ir mokėjimų; tai mokiniai įgyja savarankiškai, intuityviai; d) pagrindinis vaidmuo sprendžiant šią mokomąją problemą priklauso mokiniams; mokiniai mąsto ir veikia, mokytojas nukreipia jų veiklą, ją koreguoja, tik nepastebimai apribodamas pažintinės veiklos laisvę, įveda naują terminiją ir t. t., nuolatos ir diferencijuotai kontroliuoja, kaip mokiniai įsisavina naujas žinias tiesiogiai jų pažintinės veiklos metu.	1. Mokytojas (ar mokinys) parenka specialią temą (klausimą), kurią (kurį) turi išnagrinėti mokiniai ir kuri griežtai reglamentuota mokymo programos. 2. Mokytojas pateikia mokiniams griežtą konkretaus mokomojo uždavinio sąlygų formuluotę. 3. Mokytojas tiksliai formuluoja konkretų reikalavimą (klausimą) – mokomąją užduotį, kurią reikia atlikti. 4. Duotosios mokomosios užduoties sprendimas: a) mokomoji užduotis būtinai turi sprendimą, jį tik reikia surasti; b) mokomosios užduoties sprendimas visada numato vienareikšmį rezultatą (atsakymą), galimi tik įvairūs šio rezultato gavimo būdai; c) mokomosios užduoties sprendimui pakanka tų žinių, mokėjimų ir įgūdžių, kuriuos mokiniai įgijo prieš pateikiant tą užduotį; d) pagrindinis vaidmuo sprendžiant šią mokomąją užduotį priklauso mokytojui; mokytojas moko mokinius savo veiklos pavyzdžiu, mokiniai aktyviai (ar pasyviai) dirba pagal pateiktą pavyzdį, įsimena pagrindinius faktus, atsiskaito už visa tai mokytojui, atgamindami viską, ką jie sužinojo iš mokytojo (ar vadovėlio) [127, p. 267–268].

Probleminio mokymo atveju mokiniams pateikiama visa, nors kai kurie jo komponentai gali iš karto nepasireikšti (išaiškinti šiuos komponentus gali būti specialios mokymo užduotys). Numatoma, kad iškeltą problemą mokiniai sprendžia savarankiškai, mokytojas tik duoda kryptį ir organizuoja darbą. Pagrindiniai mokymo metodai – euristiniai. Probleminio mokymo atveju matematikos pamokos schema atrodo taip:

1) Mokymo probleminės situacijos sukūrimas.
2) Problemos iškėlimas ir jos formulavimas.
3) Sąlygų, apibūdinančių problemą, nagrinėjimas.
4) Iškeltos problemos sprendimas: a) problemos apsvarstymas ir galimų tikslingų jos sprendimo krypčių numatymas; b) žinių, reikalingų problemai išspręsti, pasirinkimas ir jų sisteminimas; c) numatyto problemos sprendimo detalizavimas.
5) Gauto sprendimo teisingumo pagrindimas.
6) Problemos sprendimo eigos ir rezultatų tyrimas bei naujų žinių išskyrimas.
7) Praktinis naujų žinių taikymas sprendžiant specialiai parinktus uždavinius.
8) Išspręstos problemos galimų plėtinių ir apibendrinimų nagrinėjimas.
9) Gauto problemos sprendimo nagrinėjimas ir kitų, labiau ekonomiškų, gražesnių sprendimų ieškojimas.
10) Atlikto darbo rezultatų aptarimas.

2.12. Kiti matematikos mokymo proceso tobulinimo keliai

2.12.1. Algoritminis-loginis požiūris į matematikos mokymą

Mokymo algoritmizavimas turi du aspektus: 1) *algoritmų mokymas* ir 2) *paties mokymo algoritmų sudarymas*. Aptarsime šiuos aspektus.

Algoritmu laikome vienareikšmiškai suprantamą nurodymą (taisyklė, procedūra, griežta operacijų seka), kurio tikslus įvykdymas visada baigiasi bet kurio uždavinio išsprendimu, jei tas uždavinys priklauso klasei uždavinių, kuriai šis algoritmas buvo sukurtas.

Matematikoje yra labai daug algoritmų, skirtų įvairių klasių uždavinių sprendimui, pradedant keturių aritmetikos veiksmų atlikimo ir baigiant diferencialinių ir integralinių lygčių sprendimo algoritmais. Tai liudija, kad bet kuriame matematikos mokymo etape susiduriame su algoritmų mokymu. Algoritmų formulavimas ir taikymas yra susiję su mokėjimu tiksliai formuluoti taisykles ir griežtai jų laikytis. Šis mokėjimas – viena iš matematinio mąstymo savybių – svarbus kiekvienam žmogui.

Bet kurioje veiklos srityje dažnai iškyla būtinumas sukurti įvairias instrukcijas, nurodymus, taisykles. Jas kuria, aišku, ne kiekvienas žmogus, bet griežtai jų laikytis turi mokėti visi, nes kiekviename žingsnyje tenka susidurti su kokiomis nors taisyklėmis, kurių reikia laikytis visuomenės gyvenime. Taigi yra labai svarbi hodegetinė (auklėjamoji) matematikos funkcija, nes matematika moko ir tiksliai formuluoti taisykles, ir griežtai jų laikytis. Bet kad matematika atliktų šią auklėjamąją funkciją, būtina atitinkamai įgyvendinti jos mokymą.

Algoritmų mokymas kartais suprantamas kaip gatavų algoritmų pateikimas mokiniams, ir, remiantis tuo, jis priešpriešinamas kūrybiniam mąstymui. Tačiau tai neteisinga. Algoritmų mokymas nesumažina kūrybinio ieškojimo, intuicijos vaidmens, jis padeda lavinti mokinių loginį, kūrybinį mąstymą, jei remiamas tokia metodika, kurią taikant mokiniai skatinami savarankiškai atrasti būtinus algoritmus.

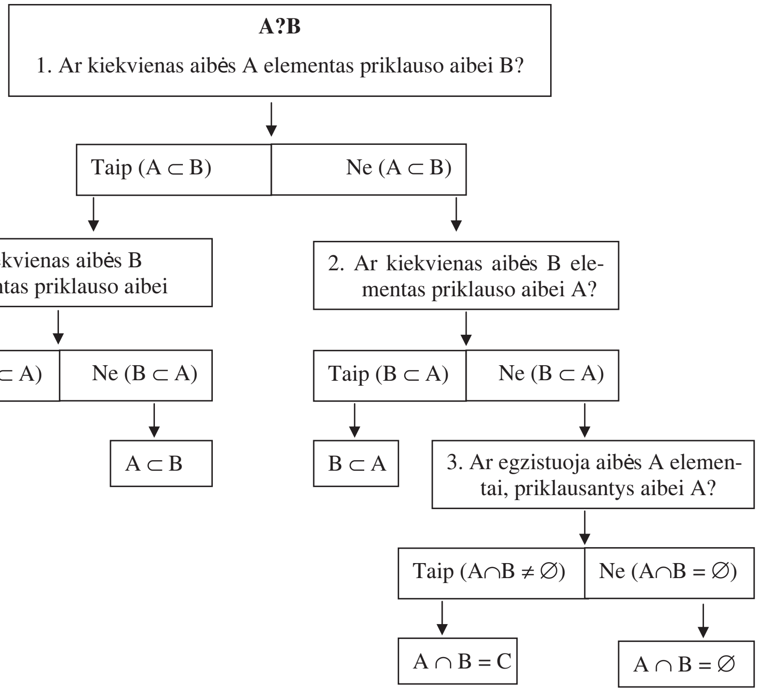
Antras loginio-algoritminio požiūrio į matematikos mokymą aspektas – mokymo algoritmų kūrimas. Realus mokymo procesas, organizuojamas mokytojo, susideda iš apibrėžtos pedagoginių veiksmų sekos. Tais veiksmais mokytojas sprendžia apibrėžtus pedagoginius uždavinius. Tie veiksmai yra: klausimų pateikimas, paaiškinimai, pavyzdžių ir kontrpavyzdžių pateikimas, vaizdinių priemonių demonstravimas, pratimų bei uždavinių pateikimas ir t. t.

Analizuojant mokymo procesą galima visada išskirti jį sudarančius pedagoginius veiksmus. Dažnai tokia analizė išryškina atitinkamo mokymo proceso neracionalumą, pedagoginių veiksmų nepagrįstumą, jų eilės netikslingą sukomponavimą. Netgi kai kurie metodiniai nurodymai, parengti patyrusių mokytojų, paremti jų intuicija ir patyrimu, dažnai nėra optimalūs mokymo variantai.

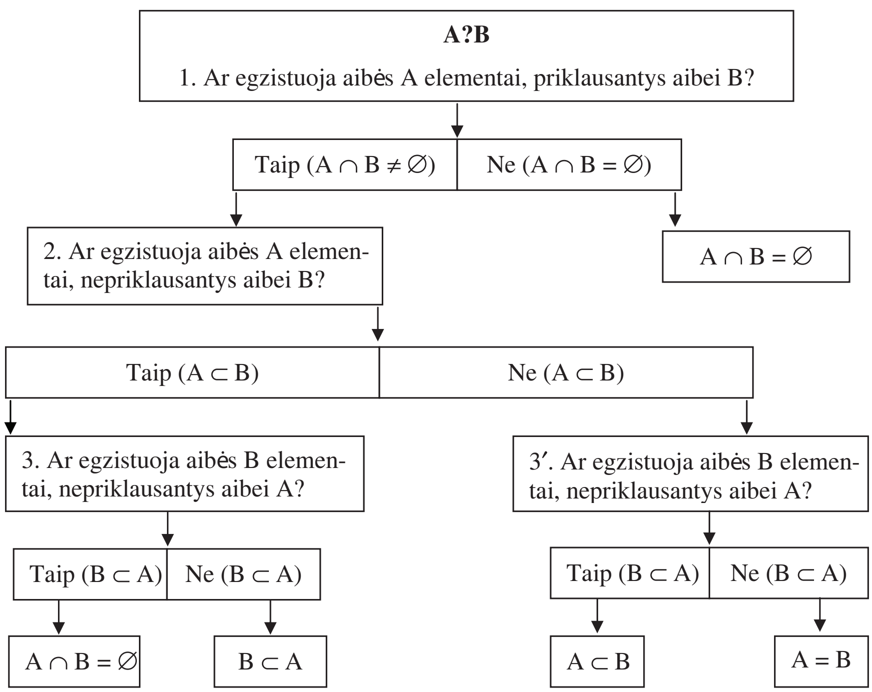
Atitinkamas žinias ir atitinkamą mąstymo veiklos lygį pasiekę mokiniai gali būti mokomi atitinkamos temos pagal atitinkamą mokymo algoritmą. Jo struktūra, sudėtis, sudedamųjų dalių seka priklauso nuo mokymo turinio loginės struktūros. Todėl mokymo algoritmų sudarymas numato loginę mokomosios medžiagos analizę.

Pati mokymo algoritmo sąvoka skiriasi nuo įprastinės algoritmo sąvokos. Jame nefiksuojama grupė atliekamų elementariųjų operacijų, netgi pati elementarioji operacija nėra griežtai apibrėžta: vienam mokiniui ta operacija iš tiesų bus elementarioji, lengvai atliekama, kitam – sunki, todėl išskaidytina į naujas operacijas, kurios laikytinos elementariomis.

Labai dažnai matematikoje prireikia nustatyti santykį tarp dviejų aibių (skaičių, geometrinių figūrų ir t. t.). Čia padės toks mokymo algoritmas:



Beje, galima ir kitokia schema:



Aiškinantis pagal pirmąją schemą, pvz., sąryšį tarp stačiakampių ir rombų aibių, veikiama taip: 1) Ar kiekvienas stačiakampis yra rombas? (Ne, schemos 1 klausimas, dešinysis atsakymas). 2) Ar kiekvienas rombas – stačiakampis? (Ne, schemos 2 klausimas, dešinysis atsakymas). 3) Ar egzistuoja stačiakampiai, kurie yra ir rombai? (taip, schemos 3 klausimas, kairysis atsakymas). Taip gauname, kad stačiakampių ir rombų sankirta C yra kvadratai.

Aiškinantis tą patį klausimą pagal antrąją schemą, turėtume: 1) Ar yra stačiakampių, kurie būtų ir rombai? (Taip, schemos 1 klausimas, kairysis atsakymas: kvadratai). 2) Ar yra stačiakampių, kurie nėra rombai? (Taip, schemos 2 klausimas, kairysis atsakymas: įvairiakraščiai stačiakampiai). 3) Ar yra rombų, kurie nėra stačiakampiai? (Taip, schemos 3 klausimas, dešinysis atsakymas: nestatieji rombai). Matome, kad šiuo atveju turime sintetinį kelią, kuris nėra toks tobulas, kaip aukščiau nagrinėtas atvejis, kuris yra analitinis ir todėl tobulesnis.

Pateiktuose algoritmuose nėra aiškiai išreikšta mokinio atsakymo į vieną ar kitą klausimą galimybė. Tačiau į tokią galimybę būtina atsižvelgti, nes tai – mokymo algoritmai, o mokiniams būdinga klysti. Todėl mokytojas, mokiniui neteisingai atsakius į kurį nors klausimą, turi būti pasirengęs pateikti priešpriešinį pavyzdį.

2.12.2. Programuotas mokymas

Programuoto mokymo programose nagrinėjama medžiaga pateikiama griežta logine tvarka. Informaciniai, operaciniai ir kontroliniai kadrai išdėstyti tikslingai, laikantis tam tikro mokymo algoritmo.

Programuotas mokymas neneigia tradicinių didaktikos principų. Priešingai, jis atsirado ieškant mokymo tobulinimo kelių geriau įgyvendinant šiuos principus. Todėl programuotas mokymas remiasi: 1) optimaliu mokomosios medžiagos atrinkimu; 2) racionaliu mokomosios medžiagos pateikimo dozavimu, paremtu optimaliais mokymo algoritmais; 3) aktyvia savarankiška mokinio veikla įsisavinant mokomąją medžiagą; 4) galimybės kiekvienam mokiniui dirbti jam palankiu tempu užtikrinimu (mokymo individualizavimas); 5) nuolatine besimokančiojo kontrole (grįžtamasis ryšis visuose mokymo etapuose).

Programuoto mokymo ir jo elementų diegimas į mokymo procesą Lietuvoje, kaip ir visoje SSRS, prasidėjo XX a. 7–8 dešimtmečiu [13]. Kadangi nebuvo tam tinkamos techninės bazės – kompiuterių, nemaža nuveikta, ieškant ir diegiant į mokymo procesą elementarias grįžtamojo ryšio įgyvendinimo priemones. Prigijo ir plačiai naudojami, ypač pradinių klasių vadovėliuose bei pratybų sąsiuviniuose, valstybiniuose egzaminuose programuotieji testai (pavyzdžius žr. šios monografijos p. 169). Dideles perspektyvas programuotam mokymui realizuoti teikia kompiuterių taikymas mokymo procese, nes jis užtikrina pačios efektyviausios programuoto mokymo atmainos – adaptacinio (lot. „*adaptatio*“ – pritaikymas, priderinimas) programuoto mokymo įgyvendinimą.

2.12.3. Techninės mokymo priemonės

XXI amžius pasižymi vis gilėjančia mokslo ir kitų visuomenės gyvenimo sričių tarpusavio sąveika. Gamyba vis labiau susilieja su mokslu, industrializuojasi ir pats mokslas, vis labiau prarasdamas savąjį „manufaktūrinį" įvaizdį. Todėl visos techninės priemonės, ypač tos, kurios vartojamos žiniasklaidos veiklai optimizuoti, randa savąją vietą ir mokykloje. Taip į mokyklą atėjo spausdinta produkcija, fototechnika, garso įrašai, kinas, radijas, televizija, videoįrašai, grafoprojektorius, kopijavimo ir kompiuterinė technika. Apgalvotas technikos panaudojimas efektyvina visų dalykų, tarp jų ir matematikos, mokymą. Stebint pradinių ir vyresniųjų klasių matematikos mokytojų pamokas, galima buvo su dideliu džiaugsmu konstatuoti, kad absoliuti jų dauguma labai skyrėsi nuo stebėtųjų pamokų XX a. 6–9 dešimtmečiuose būtent tuo, kad panaudojant kompiuterius ir kopijavimo aparatūrą mokytojai buvo pasirengę ir naudojo pamokose daug dalijamosios medžiagos mokinių savarankiškiems darbams organizuoti. O Anykščių A. Vienuolio ir Skuodo raj. Mosėdžio gimnazijų pradinukų mokytojos J. Karosienė ir Danutė Būtienė grupinio darbo metu, sprendžiant uždavinį apie stambesnių banknotų keitimą smulkesniais, panaudojo tikslias litų banknotų kopijas. Tos pačios Mosėdžio gimnazijos matematikos mokytojas Alvydas Drakšas kompiuterine technika šeštos klasės mokiniams ekrane pateikė mintinio skaičiavimo ir savarankiško darbo užduotis, o vėliau – ir jų sprendimus bei vertinimo rezultatų suvestines. XX a. II pusėje tokios mintys net niekam nebūtų atėję į galvą.

2.13. Apie kai kurias didaktinių uždavinių klases

Mokytojo veikla – nuolatinis didaktinių uždavinių sprendimas: pamokų planavimas, jų metu– daugybė smulkesnių didaktinių uždavinių (teorinės ir praktinės medžiagos parinkimas, mokymo metodų ir pamokų struktūros pasirinkimas, vaizdinių ir techninių mokymo priemonių panaudojimo klausimai ir t. t.).

Didaktiniai uždaviniai pasižymi tuo, kad vienas ir tas pats uždavinys gali turėti labai įvairius sprendimo būdus ir rezultatus, priklausančius nuo konkrečių mokymo sąlygų (netgi dirbant su lygiagrečiomis klasėmis jie gali būti skirtingi). Aišku, negalima pateikti jokių tokių uždavinių sprendimo algoritmų. Tačiau kai kuriuos bendrus didaktinius uždavinius, su kuriais susiduriama matematikos pamokose, spręsti galima pagal tam tikras rekomendacijas. Pateiksime kelis pavyzdžius.

1. *Mokinys padarė klaidą apibrėždamas sąvoką. Kaip turi reaguoti mokytojas?* Pirmiausia – klaidą laiku pastebėti. Tada reikia įtraukti kitus mokinius, pateikiant klausimus: „Ar šis apibrėžimas teisingas? Kur klaida?" Kartais – panaudoti priešpriešinius pavyzdžius. Pvz., mokiniui pateikus klaidingą apibrėžimą: „Lygiagretainis – daugiakampis, kurio priešingosios kraštinės lygios", padės priešpriešinis pavyzdys – taisyklingas šešiakampis. Visais atvejais būtina pasiekti, kad būtų suformuluotas teisingas apibrėžimas.

2. *Mokinys padarė klaidą įrodyme. Kaip turi reaguoti mokytojas?* Elgiamasi panašiai, kaip ir pirmuoju atveju.

3. *Mokinys padarė klaidą skaičiuodamas lentoje. Kaip turi reaguoti mokytojas?* Vėl labai svarbu laiku pastebėti klaidą, remtis kitais mokiniais. Darbo eiga priklauso nuo klaidos pobūdžio. Jei klaida tik skaičiavimo, ištaisoma be papildomų aiškinimų, o jei susijusi su kai kurių sąvokų supainiojimu, ne to algoritmo, formulės taikymu, reikalinga gilesnė klaidos analizė.

4. *Mokinys klysta, atrasdamas kurią nors nagrinėjamo objekto savybę ar kurio nors uždavinio sprendimo kelią. Kaip suformuluoti klausimą ar jų seriją, kad mokinys pasuktų teisingu keliu?* Tai aukščiau aptarto euristinio mokymo metodo taikymo sąlygos.

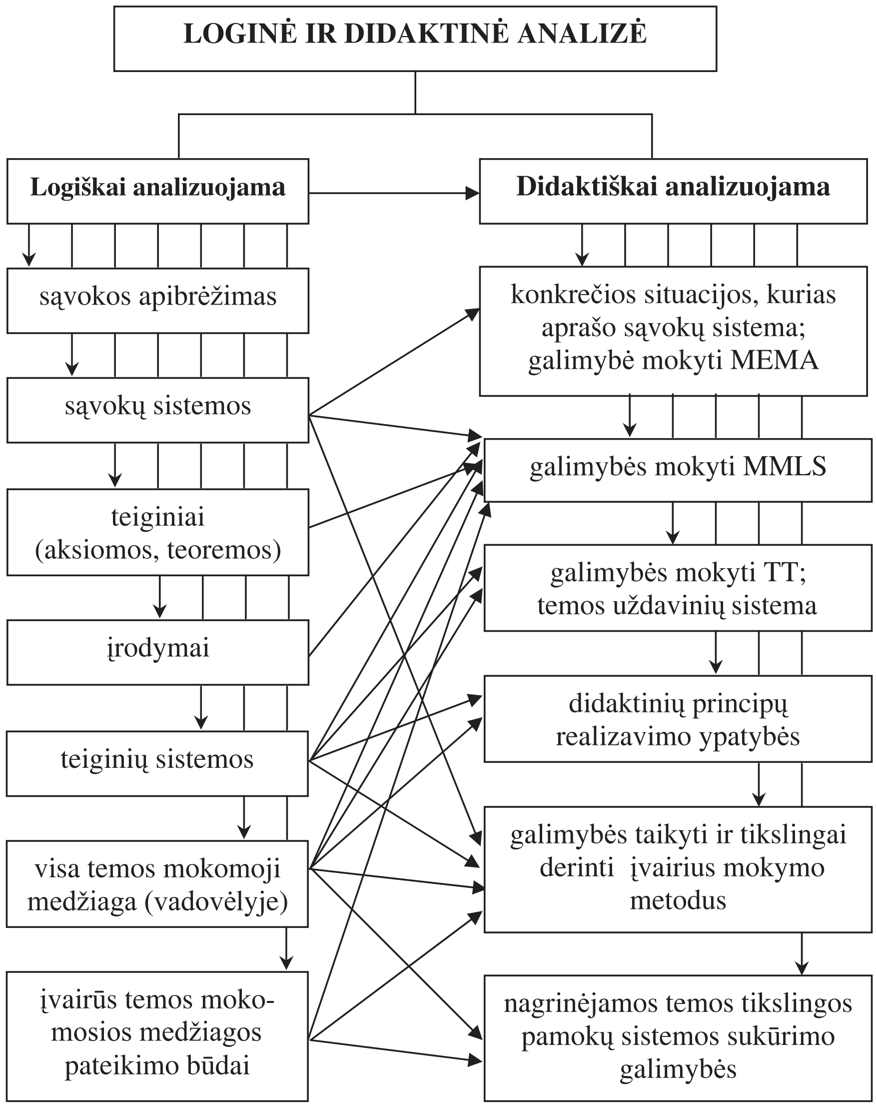
5. *Mokinys išsprendė uždavinį savitu būdu, kuris skiriasi nuo kitų mokinių taikyto būdo ir tvirtina, kad jo būdas – geresnis. Kaip turi reaguoti mokytojas?* Bet kuriuos atveju mokinį reikia pagirti už ieškojimą, savarankiškumą. O vėliau – palyginti sprendimą su įprastu ir, jei reikia, mokinį pakritikuoti arba pagirti.

2.14. Loginė ir didaktinė mokomosios medžiagos analizė

Mokomosios medžiagos struktūra – aibė sąvokų, teiginių bei loginių ryšių tarp jų. Rengiant vadovėlį (ar dėstomojo kurso konspektą) yra labai svarbu: 1) išskirti pačias svarbiausias sąvokas ir teiginius, kurios nustato temos, skyriaus ar viso mokomojo dalyko turinį; 2) surasti ryšius ir santykius tarp tų sąvokų ir teiginių (vidiniai ryšiai), taip pat su kitomis sąvokomis ir teiginiais (išoriniai ryšiai).

Mokomosios medžiagos struktūros tyrimas leidžia nustatyti mokinių galimybes įsisavinti šią medžiagą, sudaro būtinas prielaidas jų žinioms sisteminti.

Loginės analizės rezultatai naudojami didaktinei mokomosios medžiagos analizei. Analizuojamasis mokomosios medžiagos tekstas pirmiausia suskaidomas į matematinį, kuris yra analizuojamas logiškai, ir pagalbinį, kuris atlieka įvairias didaktines funkcijas, apibūdinančias vadovėlio didaktinį aparatą. Didaktinė analizė sieja įvairius komponentus: didaktinių principų realizavimas vadovėlio tekste, geriausiai atitinkančių vadovėlio struktūrą mokymo metodų taikymas, galimybių pasinaudoti pagrindiniais matematinės veiklos aspektais (matematinis empirinės medžiagos aprašymas – MEMA, matematinės medžiagos loginis sutvarkymas – MMLS, teorijos taikymas – TT, atsižvelgiant į priimtą matematikos mokymo koncepciją) tyrimas [123, p. 14]. Loginė ir didaktinė analizė gali būti atliekama su įvairios apimties medžiaga: viena sąvoka (potemė, tema), vienas teiginys, įrodymas, algoritmas arba visas dėstomasis kursas. Pateikiama žemiau schema (35 pav.) vaizduoja visus loginės-didaktinės analizės komponentus. Jų ryšiai pavaizduoti strėlėmis.



35 pav.

2.15. Kai kurių matematinės veiklos aspektų taikymas

Empirinė medžiaga, taikoma mokant, gali būti pati įvairiausia, taigi ir matematinė, jei tik ši medžiaga aprašoma pasinaudojant bendresniu, abstraktesniu matematiniu aprašymu, naudojantis naujomis sąvokomis. Pvz., lygybės $2 + 3 = 3 + 2$, $8 + 1 = 1 + 8$ ir pan. bus empirinė medžiaga, kuri bus panaudota sudėties komutatyvumo dėsniui $a + b = b + a$ pagrįsti pradinėse klasėse.

3. MOKINIŲ MĄSTYMO UGDYMAS MOKANT MATEMATIKOS (MATEMATINIO UGDYMO PSICHOLOGIJA)

3.1. Bendros pastabos

XX a. pabaigoje pasaulyje nuvilnijo švietimo reformų banga, buvo peržiūrimi švietimo prioritetai (vok. „*Priorität*", pranc. „*priorité*", lot. „*prior*" – pirmas). Ilgą laiką ypač svarbus švietimo tikslas buvo *žinių teikimas.* Dabar, greta šito tikslo, akcentuojama ir visokeriopo *gebėjimų plėtojimo* reikšmė. Pakito ne tik žinių vieta švietime, bet ir jų vaidmuo. Sparčiai tobulėjant informacinėms technologijoms, sumažėjo būtinybė įsiminti didelį žinių kiekį . Tuo pat metu išaugo jų *struktūrizavimo poreikis*. Žinios tapo svarbia prielaida gebėjimams ugdyti.

Kuriantis *informacinei* visuomenei, Šiaurės Amerikoje ir Europoje patirta, kad net ir geras tradicinių mokomųjų dalykų mokymas ne visada lemia mokinių sėkmę toliau jiems studijuojant ar išėjus į gyvenimą, dirbant. Plėtojantis mokslui ir technikai bei tobulėjant gamybai, ypač didelę svarbą įgyja *gebėjimai kritiškai mąstyti, spręsti problemas, priimti sprendimus, susidaryti nuomonę.* Todėl vienu iš svarbiausių švietimo tikslų tampa kryptingas minėtųjų gebėjimų ugdymas [134]. Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklos bendrosiose programose ir išsilavinimo standartuose nusakomi vieni iš pagrindinių ugdymo uždavinių: „puoselėti kritinio mąstymo ir problemų sprendimo bei kitus šiuolaikinės visuomenės nariui svarbius įgūdžius" [34a, p. 7]. Kritinio mąstymo ir problemų sprendimo gebėjimai yra ekonominio bendradarbiavimo ir plėtros organizacijos (OECD) ekspertų minimi kaip vertingi asmens „ištekliai".

3.2. Matematikos mokymas ir mokinių loginio mąstymo ugdymas

3.2.1. Tradicinis mokymas ir mokinių loginio mąstymo ugdymas

Mokymas – tai pirmiausia mokymas svarstyti, samprotauti. Kyla klausimas, ar to reikia specialiai mokyti, ar per įvairių mokomųjų dalykų mokymąsi to savaime išmokstama. Aišku, mokymas svarstyti ir samprotauti įgyjamas ne išmokstant logikos dėsnius, o per sukauptą gyvenimiškąjį patyrimą. Panašiai, kaip žmonės puikiai kalba gimtąja kalba, nemokėdami jos gramatikos taisyklių, net neįtardami apie jų egzistavimą, taip ir svarsto, samprotauja, nežinodami logikos dėsnių. Tačiau, jei visi sutinka, kad gramatikos reikia mokytis, tai ar reikia mokytis logikos dėsnių, vieningos nuomonės nėra.

Vienas iš tradicinės matematikos didaktikos trūkumų yra tas, kad mokiniams lieka nesuprantama matematikos dalyko logika. Paprastai mokant matematikos stengiamasi iškilusius sunkumus pašalinti mokiniams daug aiškinant, organizuojant papildomas pratybas, paprastai neišsiaiškinus, ar tie sunkumai nėra susiję su matematikos dalyko logikos nesupratimu. Todėl papildomi aiškinimai ir pratybos ne visada padeda.

3.2.2. Logikos elementų vaidmuo mokant matematikos

3.2.2.1. Svarstymų analizės metodika

Logikos elementų įvedimas į matematikos mokymą turi būti atliekamas taip, kad šie elementai taptų paties matematikos mokymo esmine dalimi, svarbiu pagalbiniu instrumentu, keliančiu matematikos mokymo efektyvumą ir darančiu poveikį mokinių loginio mąstymo lavinimui. Paprasčiausių išvedimo taisyklių įsisavinimas dar nereiškia, kad jas įsisavinus kiekvieną kartą bus apie jas galvojama. Juk ir gerai mokantis gramatikos taisykles žmogus kiekvieną kartą negalvoja, kokią taisyklę jis taiko rašydamas ar kalbėdamas.

Antra vertus, intuicijos irgi ne visada pakanka. Paprasčiausių išvedimo taisyklių mokymasis, jų taikymo treniruotės padeda vystyti intuiciją, nes įsisąmoninti veiksmai pagal taisykles pereina į teisingus intuityvius veiksmus. Specialių loginių žinių reikšmė auga, nes vis daugiau žmonių bendrauja su kompiuteriais. Kompiuteris negali remtis intuicija, todėl, jei nemokėsime jam pateikti svarstymų formalizuotu pavidalu, tai negalėsime su juo bendrauti. Vienoje LNK televizijos laidoje „Nuo... iki“ interviu su tuomet klestinčios Rusijos naftos kompanijos „JUKOS“ vienu iš vadovų Michailu Brudnu jis pasakė, kad jo sūnus pradinukas mokosi privačioje prestižinėje Maskvos mokykloje, tačiau samdomi mokytojai jį dar papildomai moko anglų kalbos ir logikos. Tai liudija, kad specialių logikos žinių poreikis vis labiau juntamas.

3.2.2.2. Loginio mąstymo ugdymas mokant matematikos

Mokiniai, mokydamiesi matematikos, susipažįsta su nemažu skaičiumi matematinių sąvokų. Vienas iš jų, kaip jau aptarta aukščiau, – pagrindines (pirmines) – įvedame abstrakcijų keliu, kartais netiesiogiai apibrėžiame per aksiomas, kartais – apibrėžiame. Mokiniai formuluoja nemaža apibrėžimų, susipažįsta su jų struktūra, taiko apibrėžimų taisykles: jie skirsto ir klasifikuoja sąvokas. Plačiai taikomi matematiniai teiginiai. Mokiniai susiduria su įvairiais matematiniais teiginiais, tiria jų struktūrą. Mokantis teoremų įrodymo, taisyklių išvedimo, mokiniams prireikia plačiai naudotis samprotavimais, taikyti įvairius įrodymo metodus, atgaminti įrodymus, rasti naujus jų būdus. Sprendžiant uždavinius, mokiniai turi sudaryti sprendimo planą, o po to – išspręsti. Visa tai reikalauja tikslių samprotavimų, loginių apibendrinimų.

Mokant matematikos visi išvardyti mokinių matematinės veiklos būdai pasitaiko labai dažnai, taikomi sistemingai, kai kurie – kiekvienoje pamokoje. Tai leidžia tvirtinti, kad matematikos mokymas yra puiki mokykla mokinių loginiam mąstymui ugdyti. Aišku, mokinių loginis mąstymas lavinamas ir kitų mokomųjų dalykų mokymo procese. Tačiau matematika turi daug daugiau galimybių, nes čia loginio mąstymo formos iškyla į pirmąjį planą, naudojama plati tų formų įvairovė. Mokiniai susipažįsta su loginiais metodais juos konkrečiai taikydami, aktyviai jais naudodamiesi. Mokyklinė matematika turi gausybę medžiagos visoms loginio mąstymo formoms demonstruoti, šių formų naudojimas čia yra mokiniams labai prieinamas. Tačiau praktiniame mokytojų darbe matematikos mokymas ne visada kaip reikiant panaudojamas mokinių loginiam mąstymui ugdyti. *Būtina efektyvaus matematikos mokymo sąlyga yra matematikos mokytojo susipažinimas su logika*: be šito efektyvaus matematikos mokymo nebus. Latvijoje, Liepojos pedagoginėje akademijoje logika dėstoma būsimiesiems pradinių klasių ir matematikos mokytojams. Pas mus, Lietuvoje, to, deja, nėra. Rengdamas šią monografiją, autorius 3 Lietuvos kaimiškuose rajonuose (Anykščių, Rokiškio ir Skuodo) ir 2 Vilniaus miesto mokyklose (A. Vienuolio pagrindinėje ir šv. Kristoforo vidurinėje) apklausė 70 pradinių klasių ir 46 matematikos mokytojus, prieš tai paskaitęs paskaitas apie logikos elementų taikymą mokant matematikos atitinkamose klasėse. Apklausos rezultatai analizuojami tolesniuose skyriuose.

Kartais pagrindinis matematikos mokymo tikslas apibrėžiamas kaip loginio mąstymo formų įsisavinimas remiantis matematine medžiaga. Tai irgi nėra teisinga, nes taip atplėšiama forma nuo turinio, forma pervertinama, nepakankamai įvertinamas materialusis ir pervertinamas formalusis ugdymo tikslai.

Matematikos mokymo procesas dažniausiai vyksta taip, kad nauji mokiniams teoriniai faktai įrodomi, uždavinių sprendimas pagrindžiamas teorija. Mokytojas nuolatos ugdo mokinių poreikį motyvuoti visus savo veiksmus, įrodyti juos. Nėra kito mokomojo dalyko, kuriame nuolat būtų klausiama: „Kuo remiamės?“ Mokiniai nuolat mokomi šį klausimą kelti sau, draugams, mokytojui, nieko nepriimti be pagrindimo, todėl mokydamiesi matematikos jie išsiugdo kritinį požiūrį ne tik į savo, bet ir į kitų – draugų, mokytojų teiginius, jų pagrindimą, o kritika ir savikritika – metodai, kuriais naudojantis atskleidžiami ir pašalinami trūkumai, ieškoma to, kas nauja. Visa tai prasideda nuo mokinio pratinimo kontroliuoti savo svarstymus, skaičiavimus. Klaida, padaryta vienoje vietoje, uždeda savąjį antspaudą vėlesniems veiksmams ir gadina galutinį rezultatą, daro jį neteisingą. Viena iš kovos su klaidomis priemonių yra savikontrolė ir mokytojo kontrolė. Mokytojas turi stengtis organizuoti mokymo procesą taip, kad išmokytų mokinius kontroliuoti pačius save: parodyti mokiniams savikontrolės būdus įvairiuose skaičiavimuose, mokyti rasti naujus savikontrolės būdus, įpratinti tik tada laikyti pratimo ar uždavinio sprendimą baigtu, kai jis yra patikrintas. O tai bus reikalinga mokiniui jo būsimojoje darbinėje veikloje, jei tik joje bus taikomi matematiniai metodai, o be jų dabar ir ateityje jau beveik niekur nebeapsieisime.

3.2.3. Klausimai ir logikos vaidmuo mokymo procese

3.2.3.1. Loginė klausimo struktūra

Kadangi klausimai keliami ne tik sprendžiant naujas problemas ir uždavinius, iškilusius moksle ir praktikoje, bet ir jau įvaldant įgytas žinias, pedagoginėje veikloje, polemikos (gr. „*polemikos*“ – karingas; ginčas, vieša diskusija, paprastai spaudoje, politiniais, visuomeniniais, literatūros ir kt. klausimais), diskusijų (lot. „*discussio*“ –

tyrimas, nagrinėjimas; viešas kokio nors dalyko svarstymas, aptarimas), disputų (lot. „*disputo*“ – svarstau, ginčijuosi; viešas mokslo, meno klausimų svarstymas) procese, logikos vaidmuo mokymo procese pasireiškia ir klausimų – atsakymų loginės struktūros žinojimu ir taikymu.

Klausimas pažinimo procese vaidina ypatingos svarbos vaidmenį, nes visas pasaulio pažinimas prasideda nuo klausimo, nuo problemos iškėlimo. Problemas kelia praktika, nes ji – pažinimo pagrindas. Terminai „problema“, „klausimas“, „probleminė situacija“ žymi ne tapačias, nors ir susijusias tarpusavyje sąvokas. Terminas „problema“ žymi tokį klausimą iš mokslo srities, į kurį atsakant nepakanka tuo metu turimos informacijos (žinių). Vienas iš galimų iškeltos problemos sprendimo kelių – hipotezės formulavimas ir jos tikrinimas. Klausimas – problemos išreiškimo forma. Bet klausimas formuluojamas ir turint tikslą gauti tam tikrą informaciją, jau žmogaus turimą, ar turint tikslą išsiaiškinti jo nuomonę apie kokį nors objektą, reiškinį, santykį, ar jo mokymo tikslu.

Žymus rusų pedagogas – novatorius Vasilijus Suchomlinskis (1918–1970) ypatingą vaidmenį mokymo procese lavinant mokinių loginį mąstymą skyrė mokytojo mokėjimui kelti klausimus mokiniams ir siekimui gauti teisingus atsakymus į juos, tokius atsakymus, kurie padėtų ugdyti mokinių intelektą, žadintų jų savarankišką mąstymą. Klausimus reikia formuluoti įvairaus sudėtingumo, reikalaujančius įvairiapusiško mokinių žinių spektro (lot. „*spectrum*“ – vaizdinys, vaizdas; visumos komponentų įvairovė), įvairius savo forma, visada atsižvelgiant į mokinių amžių. Mokinio mąstymas yra kreipiamas į atsakymų suradimą. Sukelti tokį poreikį – reiškia įtraukti mokinį į protinį darbą. V. Suchomlinskio nuomone, sunkiausia yra mokytojui, bet tai yra pats tikriausias jo meistriškumo rodiklis [142].

Klausimas formuluojamas klausiamuoju sakiniu, kuris nėra sprendinys ar teiginys, todėl nelaikomas nei teisingu, nei klaidingu. Visa klausimo – atsakymo situacija apima: a) pradinę informaciją apie klausime aptariamą objektą, kurį vadiname klausimo baze (prielaida); b) nurodymą apie šios informacijos nepakankamumą ir būtinumą toliau papildyti bei pagilinti žinias.

Taigi *klausimas – tai loginė forma, kuri turi pradinę, pagrindinę informaciją, kartu nurodantis į jos nepakankamumą siekiant gauti naują informaciją atsakyme.*

3.2.3.2. Klausimų rūšys

1) *Patikslinantieji* klausimai („Ar tiesa, kad ...?“. „Ar reikia ...?“ ir pan.). Jie gali būti *paprastieji* ir *sudėtiniai*. Paprastieji klausimai gali būti *nesąlyginiai* („Ar tiesa, kad rombo kraštinės lygios?“ ir pan.) ir *sąlyginiai* („Ar tiesa, kad jei lygiagretainis yra rombas, tai jo įstrižainės yra tarpusavyje statmenos?“). Sudėtiniai klausimai skirstomi į *konjunkcinius (sujungiančiuosius)* ir *disjunkcinius (atskiriančiuosius)*, pastarieji gali būti griežtosios ir silpnosios disjunkcijos. Pvz.: a) „Kokioms geometrinių figūrų klasėms

priskirsime trikampį ir apskritimą?“ (konjunkcinis); b) $2 \times 2 = 4$ ar $2 \times 2 = 5$?“ (griežtoji disjunkcija); c) „Šis kampas yra arba lygus $\pi/_6$ arba 30°?“ (silpnoji disjunkcija).

2) *Atgaminantieji* klausimai – jie prasideda žodžiais „Kur?“, „Kada?“, „Kodėl?“, „Koks?“ ir pan. Jie taip pat gali būti paprastieji ir sudėtiniai. Pvz.: a) „Kokį trikampį vadiname lygiašoniu?“ (paprastasis); b) „Kaip pakistų lygiakraščio trikampio kraštinės, jei du kartus padidintume jo plotą ar perimetrą?“ (sudėtinis).

3.2.3.3. Klausimų prielaidos

Klausimo *prielaida* arba *baze* (gr. „*basis*“ - pagrindas) laikomos jame esančios pradinės žinios, kurių stoką ar neapibrėžtumą reikia pašalinti. Žinių stoką ar neapibrėžtumą nurodo klausimo *operatoriai* (lot. „*operator*“ – veikėjas), t. y. klausiamieji žodžiai: „Kas?“, „Kada?“, „Kur?“, „Kodėl?“ ir pan.

Pagal prielaidų (bazių) pobūdį klausimai skirstomi į: a) *logiškai korektiškus* (lot. „*correctio*“ – pataisymas, patikslinimas) – teisingai suformuluotus, t. y. tokius, kurių prielaidos (bazės) yra teisingi teiginiai; b) *logiškai nekorektiškus* – neteisingai suformuluotus, kurių prielaidos (bazės) – neteisingi ar neapibrėžti teiginiai. Jei klausiantysis iš tiesų nežino to, kad bazė neteisinga, tai klausimas laikomas nekorektišku, o jei klausiantysis tai žino, tai klausimas laikomas *provokaciniu* (lot. „*provocatio*“ – kurstymas, iššūkis), jo formuluotė – sofistinė.

3.2.3.4. Paprastųjų ir sudėtinių klausimų formulavimo taisyklės

1. Klausimo formulavimo korektiškumas: nerekomenduotini provokaciniai, neapibrėžti klausimai.
2. Turi būti numatytos atsakymo į patikslinančiuosius klausimus alternatyvos („taip – ne“).
3. Klausimo trumpumas, aiškumas: sunku suprasti ilgus, painius, netikslius klausimus ir atsakyti į juos.
4. Klausimo paprastumas: jei klausimas sudėtinis, jį geriau išskaidyti į keletą paprastųjų.
5. Sudėtiniuose klausimuose būtina išskaičiuoti visas alternatyvas, pvz.: „Ar ši figūra yra lygiagretainis ar trapecija?“
6. Būtina skirti paprastą klausimą nuo *retorinio* (gr. „*rhētorikē*“ – tuščia gražbylystė), pvz.: „Kas iš jūsų nežino, kad lyginiai skaičiai dalijasi iš 2?“ Retoriniai klausimai yra teiginiai, nes juose kas nors teigiama arba neigiama, o klausimas negali būti teiginys.

3.2.3.5. Atsakymų loginė struktūra ir rūšys

1. *Atsakymai į paprastuosius klausimus.* Atsakymai į pirmojo tipo klausimus – patikslinančiuosius yra dviejų tipų : „taip-ne“. Atsakant į antrojo tipo klausimus, būtina pateikti tikslią, išsamią informaciją.

2. *Atsakymai į sudėtinius klausimus*. Atsakant į konjunkcinį klausimą, reikia atsakyti į visus paprastuosius klausimus, įeinančius į sudėtinį klausimą. Atsakant į disjunkcinį klausimą dažnai pakanka atsakyti tik į vieną ar kelis jį sudarančius paprastuosius klausimus.

Galima tokia klausimų klasifikacija: 1) tiesioginiai klausimai, į kuriuos galime atsakyti „taip" arba „ne"; 2) tiesioginiai klausimai, į kuriuos negalima taip vienareikšmiškai atsakyti – reikia platesnio atsakymo; 3) pusiau tiesioginiai klausimai, kuriuose klausiama, koks iš dviejų (ar daugiau) teiginių yra teisingas. Tokiu atveju klausimas yra sudėtinis, jį reikia suskaidyti į keletą paprastųjų.

Atsakydamas į klausimą, mokinys turi išsiaiškinti klausimo prielaidas ir nustatyti, ar jos teisingos, ar klaidingos. Klausimai stimuliuos aktyvią mokinių mąstomąją veiklą, jei juose bus optimalus neapibrėžtumo kiekis. Jei klausimas turi per daug neapibrėžtumo, tai mokiniams sukelia didelių sunkumų. Priešingai, lengvi, stokojantys neapibrėžtumo klausimai nereikalauja iš mokinio tyrimo, dalinių atvejų nagrinėjimo. Pvz., vietoje klausimo „Kiek apskritimų galima nubrėžti per 3 plokštumos taškus, nesančius vienoje tiesėje?" (lengvas atsakymas – „vieną"), geriau pateikti klausimą „Ar egzistuoja apskritimas, einantis per tris taškus?", nes gatavo atsakymo vadovėlyje nėra ir mokiniai patys turi nagrinėti įvairius 3 taškų išsidėstymo plokštumoje atvejus (vienoje tiesėje arba ne).

Mokytojas turi vengti nekonkrečių klausimų: „Ką galime pasakyti apie trikampį ABC?", „Kokias savybes turi (neturi) trapecija (kubas)?"

3.2.3.6. Klausimų formulavimas probleminio mokymo procese

Probleminiu mokymu, kaip jau minėjome aukščiau, suprantame tokį mokymą, kuris mokinių sąmonėje inspiruoja tokius pažintinius uždavinius ir problemas, kurios primena mokslinį tyrinėjimą. Problemų sprendimas aktyvina mokinių kūrybines protines galias. Pvz., prieš įrodant trikampio vidaus kampų didumų sumos teoremą, galima duoti mokiniams užduotį; „Nubrėžti trikampį, kuris turėtų tris duotuosius kampus" (o kampus parinkti tokius, kad jų suma būtų daug didesnė ar mažesnė už 180°). Mokiniai negalės išspręsti šio uždavinio ir turės galvoti, kokia gi to neišsprendimo priežastis. Labai tinkamos yra ir problemos, priverčiančios ieškoti matematinių dėsningumų: 1) veiksmų rezultatų (sumos, skirtumo, sandaugos, dalmens) kitimas kintant vienam ar keliems jų komponentams; 2) kvadrato ploto kitimas priklausomai nuo jo kraštinės padidinimo (sumažinimo) kelis kartus ir t. t. Efektyvūs yra ir atskiri probleminiai klausimai: 1) Kodėl keturkampis vadinamas keturkampiu? Ar galima buvo jam duoti kitokį pavadinimą, taip pat susijusį su jo savybėmis? 2) Kaip pavadintume trikampį, kurio vienas kampas bukasis?

Matematikos mokymo procese naudojami įvairūs uždavinių tipai: standartiniai, mokomieji, tiriamieji, probleminiai. Pagrindiniai uždavinio komponentai yra: sąlyga, klausimas, sprendimas, jo pagrindimas. Standartinis uždavinys – toks, kuriame tiksliai apibrėžta sąlyga, žinomas jo sprendimo bei pagrindimo būdas, t. y. toks uždavinys, kuris treniruoja mokinius atgaminti išmoktą medžiagą. Mokomasis uždavinys – toks, kuriame tiksliai neapibrėžtas (ar nežinomas) kuris nors iš komponentų. Jei tokių komponentų yra du, tai uždavinį laikome tiriamuoju, jei trys – probleminiu. Toks uždavinių skirstymas yra sąlyginis, nes, nelygu kokios besimokančiojo žinios, uždavinys gali būti priskirtas vienam ar kitam tipui.

Vyresniosiose klasėse mokiniai probleminio mokymo procese formuluoja įvairias hipotezes, numato jų patikrinimo kelius, savarankiškai atranda taisykles, dėsnius, formules, teoremų įrodymus. Bendroji mokomoji problema apima turi keletą dalinių mokomųjų problemų. Jų sprendimų aibė leidžia išspręsti pagrindinę problemą. Probleminis mokymas numato ne tik probleminės situacijos sukūrimą (probleminio klausimo iškėlimą), bet ir savarankišką kūrybišką mokinių darbą, naujų jiems dėsningumų, savybių, santykių atradimą, taip pat savųjų teiginių bei svarstymo eigos loginį pagrindimą (įrodymą). Aišku, probleminis mokymas, kaip jau pabrėžėme aukščiau, nėra universalus, jį reikia sieti su aiškinamuoju.

3.2.4. Pedagogikos klasikai apie logikos vaidmenį mokymo procese

Labai didelį vaidmenį logikai mokymo procese skyrė J. A. Komenskis, siūlęs mokyti mokinius trumpų samprotavimų taisyklių, papildomų ryškiais gyvenimiškais pavyzdžiais, o po to tobulinti mokinių loginį mąstymą analizuojant diskusines įvairių mokomųjų dalykų, taip pat ir matematikos, problemas. Labai svarbiomis mokymo procese J. A. Komenskis laikė analizę ir sintezę, lyginimą [88].

K. Ušinskis savo veikale „Žmogus kaip auklėjimo objektas“ [143] pabrėžė, kad logika – ne kas kita, kaip atspindėjimas mūsų protе tarpusavio ryšių, kurie egzistuoja tarp gamtos objektų ir reiškinių. Išmokyti vaikus logiškai mąstyti – pagrindinis mokymo pradinėse klasėse tikslas, o loginio mąstymo vystymo pagrindu turi tapti vaizdinis mokymas, gamtos stebėjimas. Labai svarbiu loginio mąstymo vystymo būdu K. Ušinskis laikė lyginimą, teigdamas, kad be lyginimo nėra supratimo, o be supratimo nėra teiginio. Pirmieji mokinių atliekami elementarūs palyginimai yra pagrįsti jutiminiu pažinimu, vaizdžiu daiktų suvokimu: „Pirmoji pakopa – daiktai lyginami tiesiogiai; antroji – dviejų daiktų lyginimo tarpininkas yra trečias, daugiau ar mažiau pažįstamas daiktas; trečioji pakopa – keletas tarpinių daiktų; bet dažniau aš jaučiu sutapimą, o po to jau ieškau tarpininkų“ [143, p. 88].

Ypatingas K. Ušinskio „Vaikų pasaulio“ skyrius yra „Pirmosios logikos pamokos“.

K. Ušinskis savo straipsnyje „Apie pradinį skaičiavimo mokymą“ rašė: „Pradedant mokyti skaičiavimo (gąsdinantį aritmetikos pavadinimą reikia palikti aukštesnėms klasėms), taip pat reikia neskubėti ir toliau eiti, tik tvirtai išmokus ankstesnį dalyką;

o išmoktą dalyką reikia nuolat taikyti praktikoje“ [109, p. 606]. (Beje, ikikarinėje Nepriklausomoje Lietuvoje daugelis autorių savo vadovėlius ir uždavinynus pradinukams irgi įvardijo kaip „skaičiavimo“, o ne „aritmetikos“ mokymo priemones [5, 6, 11, 12]. Žodžio „aritmetika“ išvengiama ir kai kuriuose dabartiniuose vadovėliuose pradinukams – „Skaičių šalis“ [25–28]). K. Ušinskis kvietė: „Tegul vaikai matuoja, sveria, skaičiuoja. Šie darbai labai pagyvina dėstymą, juos vaikai labai mėgsta ir per juos įgunda skaičiuoti“ [109, p. 607]. Bet vaikai turi būti ir pratinami naudotis mąstymo operacijomis. Todėl K. Ušinskis toliau teigė štai ką: „Savaime suprantama, kad vaikai turi ne mokytis aritmetikos taisykles, o patys jas atrasti. Pavyzdžiui, nereikia vaikams sakyti, kad jeigu negalima atimti vienetų iš vienetų, tai reikia paimti vieną dešimtį ir pan.“ [109, p. 608–609]. Siūlo vaikams duoti pagaliukų ryšuliukus ir palaidus pagaliukus bei liepti atimti, pvz., 24 – 17. Vaikai patys susigaudys, kaip tai padaryti, o tada, „kai jau visi vaikai supranta kurį nors paprastą aritmetikos dėsnį ir įgunda jį atlikti mintinai, ir žodžiu, ir raštu, tuomet galite tą dėsnį suformuluoti kaip aritmetikos taisyklę, kad įpratintumėte vaikus tiksliai kalbėti. Uždavinių turinį reikia stengtis imti iš aplinkinio vaikų pasaulio; tegul jie išmatuoja savo klasę, visus suolus, duris ir langus, tegul suskaičiuoja visų savo knygų ir sąsiuvinių puslapius, tegul suskaičiuoja savo metus, tegul suskaičiuoja savo savaites, dienas ir valandas iki švenčių“ [109, p. 608–609]. Panašiai stebėtose pamokose vaikams liepė elgtis rokiškėnės mokytojos R. Rumšienė, L. Venslovienė, I. Šutienė ir kt.

Dar viename savo straipsnyje K. Ušinskis galutinai suformulavo samprotavimų logikos reikšmę: „Samprotavimo reikšmė itin yra svarbi *matematiniuose moksluose*. Mes jau susipažinome su matematinių *aksiomų* šaltiniu, tačiau žmogus dargi pačioje ankstyvojoje vaikystėje nesustoja prie vienų aksiomų. Nuolat mėgindamas pats judėti bei mėgindamas pajudinti dangaus kūnus, juos dėstyti, kilnoti arba keisti jų formą, žmogus tuo pačiu indukcijos būdu, tik neaiškiai suvokiamu, susidaro tiek aritmetinių ir algebrinių veiksmų, tiek geometrinių figūrų bei jų savybių sąvokas. Mes pirmiau imamės sudėties, atimties, daugybos, dalybos, lygčių nagrinėjimo, negu sužinome tų veiksmų taisykles; mes pirmiau įgyjame supratimą apie tai, kas yra linija bei įvairūs linijų santykiai; kas yra trikampiai bei trikampio kraštinių ir kampų tarpusavio santykiai, kas yra apskritimas, kvadratas ir t. t., negu išgirstame ką nors iš geometrijos. Valstietis, statąsis trobelę arba *skaitytuvais apskaičiuojąs* savo sklypo plotą <...>, be abejonės, turi labai teisingą supratimą apie daugelį aritmetinių bei algebrinių tiesų ir apie įvairių geometrinių figūrų savybes; bet vis dėlto jis iš tikrųjų nemoka nei algebros, nei geometrijos, t. y. nesupranta, kaip susidaro tos matematinės sąvokos, kurias praktikoje jis labai teisingai vartoja. *Deduktyvinės, samprotaujamosios* matematikos uždavinys ir yra išskaidyti tas sudėtingas, jau susidariusias sąvokas į pirminius judesių pojūčius – į *aksiomas*, arba *akivaizdžias tiesas*, kurios kyla tiesiog iš to, kad nervų sistema negali atlikti antimatematinių judesių. Žinoma, matematikos mokslas, be to, eina ir *sintetiniu* keliu, t. y. sąmoningai komplikuoja *pirminius sprendimus*. Štai kodėl mes sutinkame su tais, kurie teigia, kad matematikoje iškart naudojami tiek induktyvūs, tiek deduktyvūs mąstymo būdai: tiek matematinių sąvokų sudarymas, tiek jų suskaidymas į pirminius sprendimus. Pati gamta savo formomis bei judėjimu pateikia matematikai uždavinius ir matematika tuos uždavinius sprendžia, suvesdama juos į tas akivaizdžias tiesas, kurios pagrįstos mūsų jausmu, kad priešingas judėjimas yra negalimas; nes matematikoje ir forma yra tiktai judėjimo pasekmė" [109, p. 471–472].

V. Suchomlinskis didelę reikšmę skyrė formavimui tokių sąvokų, kaip priežastis ir pasekmė, skirtingumas ir tapatumas, galimybė ir negalimumas ir t. t. Protinis lavinimas pagal jį prasideda ten, kur yra teorinis mąstymas, kur gyvas suvokimas – ne galutinis tikslas, o tik priemonė [142].

Visi aptartieji klasikai pagrindinį dėmesį skyrė loginio mąstymo ugdymui pradinių klasių matematikos pamokose. Aptarsime, kaip loginis mąstymas lavinamas matematikos pamokose vyresniosiose klasėse.

3.2.5. Vyresniųjų klasių mokinių loginio mąstymo lavinimas matematikos pamokose

Matematikos didaktikos specialistai teigia, kad matematika padeda lavinti kūrybinį loginį mąstymą versdama mokinius ieškoti nestandartinių uždavinių sprendimo būdų, apmąstyti paradoksus, analizuoti teoremų turinį ir jų įrodymų esmę, nagrinėti žymių mokslininkų kūrybinių minčių specifiką. Lavinamasis matematikos pamokų efektas pasireiškia tuo, kad specifinis matematikos loginis griežtumas ir samprotavimų tvarkingumas tiesiog ugdo mokinių bendrąją loginio mąstymo kultūrą, ir pagrindinis matematinio švietimo lavinamosios funkcijos aspektas yra visavertės argumentacijos gebėjimų išvystymas. Jei kasdieniniame gyvenime ir netgi daugelyje mokslų nepavyksta argumentacijos padaryti visiškai išsamios, tai matematikoje yra kitaip: „Čia argumentacija, nebūdama absoliučiai išsamia, leidžianti net ir mažiausią pagrįsto prieštaravimo galimybę, negailestingai pripažįstama klaidinga ir atmetama kaip netekusi bet kokios galios <...>. Mokydamasis matematikos, mokinys pirmą kartą savo gyvenime sutinka tokį griežtą reiklumą argumentacijos visavertiškumui", – rašė žymus rusų matematikas Aleksandras Chinčinas (1894–1959) [147]. Mokydamiesi matematikos, mokiniai išmoksta tarpusavio kritikos; mokinys, kuris apsigina nuo savo draugų abejonių dėl savojo svarstymo eigos, pajunta, kad būtent loginės argumentacijos visavertiškumas buvo jo ginklas, kuriuo naudodamasis jis nugalėjo. O kartą tai pajutęs, jis neišvengiamai išmoks gerbti šį ginklą, ir, net būdamas kitose situacijose (ginčydamasis su kitais arba mąstydamas vienas), ieškos tikslios, visavertės argumentacijos, o tai jau rodo aukštesnį jo loginio mąstymo lygį. A. Chinčinas suformulavo kai kuriuos konkrečius reikalavimus, kuriuos įvykdžius argumentacija bus svari: kova prieš neteisėtus apibendrinimus ir nepagrįstas analogijas, už disjunkcijų pilnumą, už klasifikacijų nuoseklumą ir išsamumą.

Matematinio mąstymo stilius pasižymi šiomis ypatybėmis: 1) absoliutus samprotavimo loginės schemos dominavimas; 2) lakoniškumas, sąmoningas siekimas visada rasti trumpiausią iš vedančių į duotąjį tikslą kelią; 3) tikslus svarstymo eigos išskaidymas į atskirus atvejus; 4) skrupulingai tiksli simbolika [147]. Aptartieji matematinio mąstymo bruožai padeda pakelti bendrą moksleivių mąstymo kultūrą, vystyti jų intelektinį potencialą. Matematikos pamokose mokiniai operuoja visomis mąstymo formomis: sąvokomis, teiginiais, samprotavimais. Dažniausiai mokiniai naudojasi tokiomis dedukcinių samprotavimų formomis: kategoriškasis silogizmas, entimema, polisilogizmai, dilemos ir t. t.

3.3. Mokinių matematinio mąstymo ugdymas ir matematinių uždavinių formulavimas

3.3.1. Bendrieji matematinio ugdymo bruožai ir matematinio mąstymo vaidmuo

Matematikos mokslo ir matematikos didaktikos raidos procese natūraliai pakito sąvokos „matematinis mąstymas“ turinys, labai išaugo jos vaidmuo matematikos mokymo procese. Tarp mokymo sistemos ir protinio mokinių vystymosi eigos egzistuoja labai glaudus ryšys, kuris nusakomas atitinkamais dėsniais. Šių dėsnių ieškojimas yra viena iš pagrindinių pedagoginės psichologijos problemų. Šiuo metu yra padaryti tik pirmieji žingsniai sprendžiant šią problemą. Atsakymai į klausimus: „Kokį mąstymą vadiname matematiniu?“, „Kokie yra matematinio mąstymo pagrindiniai bruožai?“ dar nėra nei tikslūs, nei vienareikšmiški tiek matematikos didaktikoje, tiek pedagoginėje psichologijoje. Aišku, būtina pažymėti, kad pedagoginėje psichologijoje, kibernetikoje jau yra nemaža laimėjimų sprendžiant šias problemas, bet jie dar mažai naudojami didaktikoje.

Matematinis ugdymas – sudėtingas procesas, kurio komponentai yra šie: a) atitinkamos matematinių faktų ir idėjų sistemos įsisavinimas; b) atitinkamų matematinių mokėjimų ir įgūdžių sistemos susiformavimas; c) matematinio mąstymo vystymas. Labai ilgai buvo manoma, kad būtini yra tik du pirmieji komponentai, o trečiasis formuojasi stichiškai, sėkmingai formuojantis pirmiesiems dviems. Tai šiek tiek teisinga, bet nevisiškai. Psichologų tyrimai liudija, kad matematinis mąstymas yra ne tik vienas iš svarbiausių mokinių pažintinės veiklos komponentų, bet ir toks, be kurio kryptingo lavinimo negalima užtikrinti pirmųjų dviejų komponentų suformavimo.

Psichologai ne kartą pabrėžė, kad vaiko mokymasis ir jo protinė raida yra glaudžiai susiję tarpusavyje. Tačiau, nors vaikas besimokydamas vystosi, jo protinis lavėjimas vyksta gana savarankiškai. Pasirodo, kad matematinės sąvokos nesiformuoja šalia pažinimo proceso, o yra palaipsniui konstruojamos skirtingu laipsniu atskiruose mokymo etapuose. Mokiniai su silpnai išvystytu matematiniu mąstymu negali įsisavinti (suprasti) vienos ar kitos matematinės idėjos, jie sugeba formaliai įsiminti tik atskirus matematinius faktus. Kad perprastų šią idėją, mokiniai turi išsiugdyti gebėjimą atlikti apibrėžtas protines operacijas, kurias įvaldę jie gali aktyviai ir sąmoningai suvokti naują idėją, tiesiogiai ar netiesiogiai dalyvaudami ją kuriant.

Iki mūsų dienų psichologinių tyrimų rezultatai ugdymo praktikai tarnauja beveik vien tokiu būdu: tiriant uždavinio sprendimo eigą, išaiškinami būdai, kuriais išsprendžiami atitinkami uždavinių tipai, o po to mokomojo eksperimento metu patikrinamas jų pedagoginis efektyvumas, paskui tie būdai perteikiami mokiniams, t. y. suformuojami konkretūs mąstymo būdai, organiškai susiję su apibrėžtų operacijų išskyrimu ir fiksavimu, tačiau neatskleidžiant to mąstymo proceso, kurio metu tos operacijos taikomos, esmės. Aišku, mokantis matematikos tam tikra mąstymo technika (operacijų atlikimo būdų ar įgūdžių, atliekant jas pagal iš anksto numatytus požymius, visuma) reikalinga, bet negalima tuo apsiriboti: tai nėra pagrindinis mokinių mąstymo lavinimo uždavinys ar netgi svarbiausia jo dalis. Reikia mokinius mokyti surasti naujus ryšius, padėti jiems įvaldyti bendrus veiksmų būdus, padedančius spręsti naujus uždavinius, įsavinti naujas žinias, t. y. mokantis matematikos būtina ne tik kryptingai, bet ir visapusiškai lavinti mokinių matematinį mąstymą, padaryti jį pakankamai gilų ir bendrą. Paprasčiau sakant, reikia, kad mokiniai susiformuotų bendrus, o ne vien mąstymo konkrečioje situacijoje būdus. Aišku, bendrieji mąstymo būdai formuojami remiantis daliniais, kurie yra susiję su konkrečia mokomąja medžiaga. Pvz., mokant spręsti uždavinius, sudarant lygtis iš jų sąlygų (judėjimo, bendro darbo ar kt. tipų uždaviniai), mokiniai, įvaldę mokėjimus sudaryti lygtis iš tipinių uždavinių sąlygų, įvaldo ir bendrąjį mokėjimą – uždavinių sprendimą lygčių sudarymo iš jų sąlygų metodu. O šis metodas – analitinio mąstymo forma. Taigi susiformavę konkrečios matematinės medžiagos pagrindu bendrieji metodai tampa universaliais, o tai liudija apie galimybes juos perkelti į kitas matematinės veiklos sferas.

3.3.2. Bendroji lavinamojo matematinio mąstymo charakteristika

Pasaulio pažinimas, realizuojamas mąstymu, – ne vien intelektinis, protinis procesas. Mąstymas atsiranda ir išlieka, būdamas glaudžiai susijęs su praktine žmogaus veikla. Tačiau mąstymu žmogus gali jau ne realiai, ne praktiškai, o mintyse pertvarkyti gamtos objektus ir reiškinius. Mintimis žmogus gali veikti ten, kur praktiškai veikti jis negali. Taigi žmogaus gebėjimas mąstyti nepaprastai išplečia jo praktines galimybes. Pirmasis mąstymą bandė apibrėžti rusų psichologas Ivanas Sečenovas (1829–1905), kuris suformulavo genialią hipotezę apie tai, kad žmogaus mintis yra „susitikimas“ su realybe, šio „susitikimo“ procese ši realybė pažįstama, pati mintis yra žmogaus atsakomoji reakcija į realybės poveikį. I. Sečenovas iškėlė ir hipotezę apie tai, kad mąstymas yra procesas, nors jo laikais ši hipotezė toliau tiriama nebuvo nei jo paties, nei kitų psichologų. Dabartinėje psichologijoje mąstymas suprantamas kaip socialiai sąlygotas, tvirtai susietas su kalba psichinis procesas, kurio metu ieškoma ir atrandama esmė, t. y. procesas, kuriame apibendrintai atspindima realybė jos analizės bei sintezės metu. Mąstymas atsiranda praktinėje veikloje iš jutiminio pažinimo ir išeina toli už jo ribų [133, 149].

Sovietiniai psichologai tirdami mąstymą vadovavosi determinizmo (lot. „*determinare*" – apibrėžti) principu: išorinės priežastys veikia per vidines sąlygas. S. Rubinšteinas teigė, kad tik remiantis šiuo principu galima apibrėžti psichinių reiškinių dėsningumus ir kad būtent šis principas yra psichologinių teorijų branduolys [139].

Lyginant su visais kitais žmogaus psichikos reiškiniais (pvz., jausmais), mąstymas yra labiausiai paslėptas, sunkiai tiriamas ir nagrinėjamas. *Vidinės mąstymo sąlygos* apibrėžiamos aktyvumo lygiu ir tokių mąstymo operacijų: analizės, sintezės ir apibendrinimo tarpusavio sąveikos laipsniu pažinimo procese. Išorinės mąstymo sąlygos – sąlygos, kurios sukelia mąstymą, yra objektas, apie kurį mąstoma, ir aplinka, kurioje sąveikauja subjektas ir objektas. Kalbant paprasčiau, mąstymas nėra vienas objekto pažinimo aktas – tai, kas nežinoma, iš karto neatsiskleidžia. Vieno mąstymo akto rezultatai įtraukiami į tolesnę mąstymo proceso eigą, objekto pažinimas nuolat gilėja. Mąstymo procesas realizuojamas kaip žmogaus ir jo suvokiamos situacijos, t. y. kaip subjekto ir objekto sąveika. Kartais pasitaiko, kad mąstymas pakeičia pradinę iškilusią problemą, o ši pakeista problema veikia tolesnę žmogaus minties eigą, koreguoja ją, sukeldamas naujus klausimus ir naujas prielaidas apie suvokiamąjį objektą. Matematinis mąstymas natūraliai visiškai atitinka mąstymo apskritai pobūdį. Tačiau jis turi savo specifinių bruožų ir ypatybių, kurias lemia nagrinėjamų objektų ir jų tyrimo metodų specifika. Mąstanti, kūrybinga asmenybė gali neturėti pakankamai išvystyto matematinio mąstymo. Konkretus pavyzdys – talentinga lietuvių poetė Salomėja Nėris, kuri, mokydamasi Vilkaviškio „Žiburio" gimnazijoje, labai vargo su matematika ir kuriai tik kaip daug žadančiai poetei gimnazijos direktorius ir matematikos mokytojas Steponas Vaitkevičius tik iš pasigailėjimo parašė neužtarnautą minimalų teigiamą pažymį (trejetą, pagal tuometinę penkiabalę vertinimo sistemą). Beje, tas nepakankamai išvystytas matematinis mąstymas atsiliepė poetei ir kitur: buityje, politikoje – ji dažnokai pasijusdavo bejėgė ir atsiduodavo kitų valiai. Tad matematinis mąstymas pirmiausia yra viena iš gamtamokslinio mąstymo rūšių, o pastarasis apibūdinamas: 1) gamtamokslinės informacijos ir žinių įgijimu (atitinkamų faktų ir specialių terminų žinojimu, mokėjimu atgaminti dėsnius ir taisykles, apibrėžti formą, struktūrą, procesus ir jų funkcijas, paaiškinti dėsnių reikšmę); 2) mokėjimo naudotis gamtamokslinėmis žiniomis praktikoje formavimu, gyvenimiškojo patyrimo praturtinimu taikant buityje gamtos dėsnių žinias, mokėjimu skirti faktus ir hipotezes, vykdyti eksperimentus ir tikrinti jų išvadas, daryti apibendrinimus eksperimentinių duomenų pagrindu. Kadangi mąstymas neatskiriamas nuo veiklos, suprantama, kad ir gamtamokslinis mąstymas gali būti apibūdinamas ir jo metodikos pagrindiniais elementais: 1) problemos supratimas; 2) tikslus jos apibrėžimas ir atribojimas nuo kitų problemų; 3) visų situacijų, susijusių su šia problema, nagrinėjimas; 4) problemos sprendimo planavimas, geriausio jos sprendimo būdo suradimas; 5) labiausiai tikėtinos hipotezės pasirinkimas; 6) eksperimentų hipotezei patikrinti planavimas; 7) tų eksperimentų atlikimas; 8) kontrolinių eksperimentų atlikimas; 9) išvadų formulavimas ir pagrindimas; 10) išvadų praplėtimas naujoms situacijoms, kuriose pasireiškia tie patys veiksniai. Visi šie elementai yra pagrindas taikyti įvairiems metodams mokant gamtamokslinių disciplinų.

Turėdamas visus gamtamokslinio mąstymo bruožus, matematinis mąstymas turi ir savų ypatybių. *Matematinio mąstymo charakteristika* turi šiuos aspektus: 1) *turinys* (pagrindiniai matematinio mąstymo tipai); 2) *matematinė veikla* (mokslinio matematinio tyrimo metodai); c) *forma* (mąstymo savybės, apibrėžiančios mąstymo stilių); d) *subjektyvios žmogaus, užsiimančio matematine veikla, charakterio savybės* (dorovinės ir kt.). Suvestinė matematinio mąstymo komponentų charakteristika pateikta 14 lentelėje [127, p. 135].

14 lentelė

Suvestinė matematinio mąstymo komponentų charakteristika

Turinys (mąstymo tipai)	**Veikla (matematinio tyrimo metodai)**	**Formos (mąstymo stilius)**	**Subjektyviosios charakterio savybės**
Konkretusis mąstymas Abstraktusis mąstymas (analitinis, loginis ir erdvinis-scheminis) Intuityvusis mąstymas Funkcinis mąstymas Dialektinis mąstymas Struktūrinis mąstymas Utilitarinis mąstymas Kūrybinis mąstymas	Stebėjimai ir bandymai Indukcinis metodas Dedukcinis (aksiominis) metodas Tradukcinis metodas (analogijos taikymas) Modeliavimas (abstrakčių matematinių modelių taikymas)	Lankstumas Aktyvumas Tikslingumas Atminties pasirengimas Platumas Gilumas Kritiškumas Savikritiškumas Kalbos lakoniškumas, aiškumas ir tikslumas	Noras tyrinėti Gebėjimas susikaupti Atkaklumas Polinkis į kūrybą Intelektinis sąžiningumas Smalsumas Tikslumas, teisingumas Kalbos aiškumas, lakoniškumas Vaizduotės gebėjimai, fantazija Pasitenkinimas darbo procesu ir jo rezultatais

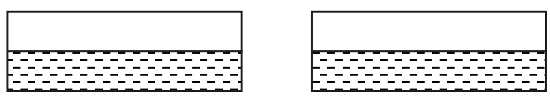
Pateiktoji matematinio mąstymo komponentų schema yra tik apytikslė ir nėra nei išsami, nei pilna. Suprantama, kad realiame matematinio mąstymo procese visi aukščiau pateiktieji komponentai, organiškai sąveikaudami vienas su kitu, glaudžiai susipina įvairiose mąstymo operacijose ir pasireiškia vienovėje. Šio sudėtingo proceso išskaidymas reikalingas tam, kad galėtume jį geriau išnagrinėti.

Dabar pereisime prie matematinio mąstymo tipų nagrinėjimo. Pagrindine didaktine matematinio mąstymo priemone laikomas matematinių uždavinių, kurių turinys ar sprendimo būdai atitinka tam tikrą vietinę mąstymo charakteristiką, sprendimas.

3.3.3. Pagrindiniai matematinio mąstymo tipai ir jo vystymo didaktiniai būdai

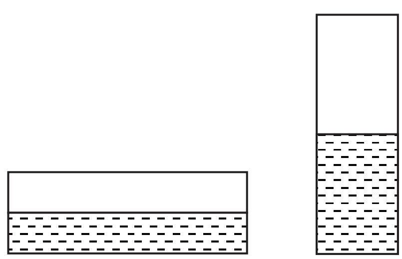
Konkretusis (daiktinis) mąstymas – mąstymas, vykstantis esant glaudžiai sąveikai su konkrečiu objektu ar jo modeliu. Yra dvi jo rūšys: a) *neoperatyvusis mąstymas* (stebėjimas, jutiminis suvokimas); b) *operatyvusis mąstymas* (veiksmai su objektu ar jo modeliu). Neoperatyvusis konkretusis mąstymas būdingas ikimokyklinio ir jaunesniojo mokyklinio amžiaus vaikams, kurie mąsto tik vaizdais, aplinką suvokia tik vaizdiniais. Tai, kad tokio amžiaus vaikai dar neoperuoja abstrakčiomis sąvokomis, liudija Ž. Pjažė bandymai [114]. Pateikiame porą šių bandymų.

1. Vaikams demonstruojami du vienodi indai su vienodu spalvoto skysčio kiekiu (36 pav.). Skysčio kiekio vienodumas aptariamas su jais.



36 pav.

Po to skystis iš antrojo indo perpilamas į trečią kitokios formos indą (37 pav.) ir pasiūloma vaikams palyginti skysčio kiekį abiejuose induose.



37 pav.

Vaikai tvirtina, kad trečiajame inde skysčio daugiau, negu pirmajame, nors perpylimas buvo atliekamas jiems matant.

2. Vaikams demonstruojamos gėlės: rugiagėlės ir gvazdikai (pvz., 17 rugiagėlių ir 5 gvazdikai) ir klausiama, ko yra daugiau – rugiagėlių ar gvazdikų. Paprastai vaikai atsako, kad gvazdikų daugiau (nes jie yra žymiai didesni).

Ž. Pjažė visa tai aiškina tuo, kad neoperatyvusis tokio amžiaus vaikų mąstymas tiesiogiai ir visiškai yra pajungtas jų suvokimui, todėl jie negali pasitelkdami sąvokas abstrahuotis nuo kai kurių labiausiai krintančių į akis nagrinėjamų objektų savybių. Mokant vidutinio ir vyresniojo amžiaus vaikus poveikis neoperatyviajam konkrečiajam mąstymui pasireiškia naudojant įvairias vaizdines priemones, diafilmus, kiną, televiziją, kompiuterį.

Ž. Pjažė tvirtina, kad operatyvusis konkretusis mąstymas yra veiksmingesnis rengiant vaikus abstrakčių sąvokų įsisavinimui. Praktinė veikla yra vaiko psichikos vystymosi pagrindas. Konkretusis mąstymas ypač svarbus mokant matematikos žemesnėse ir vidurinėse klasėse. Būtina mokyti mąstyti pasitelkiant ne tik tradicinio vaizdumo priemones, bet ir remiantis konkrečiais matematiniais pavyzdžiais. Pvz., pradinėse klasėse, aiškinant sudėtį stulpeliu:

$$\begin{array}{r} 235 \\ +\,\underline{341} \\ 576, \end{array}$$

aiškinama taip: 235 + 341 = (200 + 30 + 5) + (300 + 40 + 1) = (200 + 300) + (30 + + 40) + (5 + 1) = 500 + 70 + 6 = 576.

Vyresniosiose klasėse konkretumas pažinimo procese mažėja, nes pats konkretumas keičia savąją formą, jį keičia abstrakcijos. Todėl reikia prisiminti ir tai, kad nuolatinis naudojimasis vaizdumu kartais gali pasirodyti esąs žalingas, pvz., mokant stereometrijos nuolatinis modelių naudojimas gali stabdyti erdvinės vaizduotės vystymąsi.

Abstraktusis mąstymas yra glaudžiai susijęs su mąstymo operacija – abstrahavimu. Ji turi dvejopą pobūdį: *negatyvų* (lot. „*negativus*“ – neigiamas) – abstrahuojamasi nuo nagrinėjamojo objekto kai kurių savybių, ir *pozityvų* (lot. „*positivus*“ – teigiamas) – išskiriamos apibrėžtos objekto savybės, kurias reikia išnagrinėti. Todėl abstrakčiuoju mąstymu vadinamas mąstymas, kuris apibūdinamas mokėjimu mintyse abstrahuotis nuo konkretaus nagrinėjamo objekto turinio ir sutelkti dėmesį į tas jo bendrąsias savybes, kurias reikia išnagrinėti. Mokantis matematikos abstraktusis mąstymas pasireiškia dviem pavidalais: a) *išreikštiniu* (pvz., nagrinėjant kurį nors geometrinį kūną, abstrahuojamasi nuo visų realių tokių kūnų savybių, išskyrus jų formą, matmenis, padėtį erdvėje); b) *neišreikštiniu* (pvz., skaičiuojant klasės mokinius, abstrahuojamasi nuo kiekvieno atskiro mokinio savybių, laikant visus mokinius tapačiais, domina tik skaičiavimo rezultatas – klasės mokinių skaičius). Abstraktusis mąstymas skirstomas į: a) *analitinį* , b) *loginį* ir c) *erdvinį-scheminį* .

Analitinis mąstymas apibūdinamas atskirų pažinimo etapų tikslumu, jo turinio ir taikomų operacijų įsisąmoninimu. Mokantis analitinis mąstymas pasireiškia per: a) analitinį teoremų įrodymą bei uždavinių sprendimą; b) tekstinių uždavinių sprendimą sudarant lygtis ar jų sistemas iš sąlygos; c) uždavinių sprendimo rezultatų analizę ir t. t. Šis mąstymas nėra izoliuotas nuo kitų abstraktaus mąstymo rūšių; atskiruose mąstymo etapuose jis gali tik labiau pasireikšti negu kitų rūšių mąstymas. Ši mąstymo rūšis glaudžiai susijusi su viena iš pagrindinių mąstymo operacijų – analize.

Loginis mąstymas apibūdinamas mokėjimais: a) gauti išvadas iš duotų prielaidų; b) išskirti dalinius atvejus, išsemiančius duotąjį reiškinį: c) teoriškai numatyti būsimą rezultatą; d) apibendrinti duotąsias išvadas. Mokymo procese šis mąstymas pasireiškia per pilnosios indukcijos ir dedukcijos būdu gaunamas išvadas, teoremų įrodymą. Loginį mąstymą lavinti padeda, pvz., tokie pratimai:

1) Palyginti skaitinių reiškinių reikšmes: 987656 + 656135 ir 656135 + 987656.

2) Teisingas ar ne teiginys: „Kad kampai būtų gretutiniai, pakanka, kad jie turėtų bendrą kraštinę“?

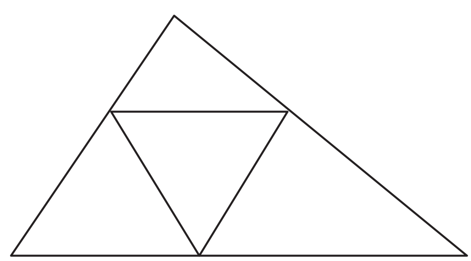
3) Dviese žaidžiamas toks žaidimas: pirmasis pasako natūralųjį vienaženklį skaičių nuo 1 iki 9. Antrasis prideda prie jo taip pat kokį nors natūralųjį vienaženklį skaičių ir pasako sumą. Prie jos pirmasis prideda vėl natūralųjį vienaženklį skaičių bei pasako sumą ir t. t. Laimi tas, kas pirmasis pasako skaičių 66. Kas laimės šį žaidimą – pirmasis ar antrasis žaidėjas?

Erdvinis-scheminis mąstymas apibūdinamas mokėjimu mintyse konstruoti erdvinius vaizdus ar schemines nagrinėjamų objektų konstrukcijas ir atlikti su visu tuo operacijas, atitinkančias tas operacijas, kurios gali būti atliekamos su realiais objektais. Neaukštas erdvinio-scheminio mąstymo lygis paprastai yra kliūtis sėkmingam stereometrijos mokymuisi, nes šis mąstymo tipas formuojasi labai ilgai ir jį reikia labai kruopščiai formuoti. Tam padeda planimetriniai pratimai, pvz.:

a) kiek atkarpų yra 38 pav.?

38 pav.

b) Kiek trikampių yra 39 pav.?

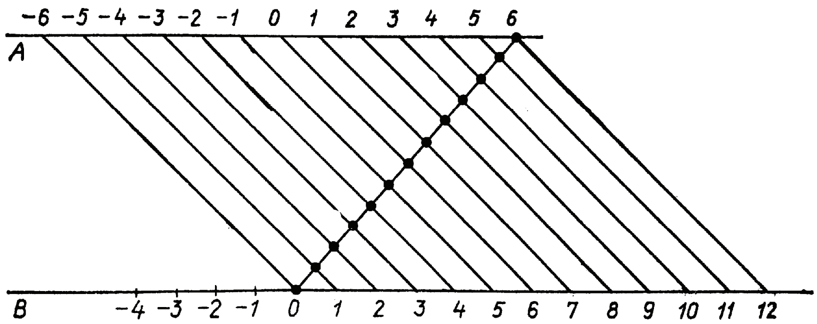


39 pav.

Padeda čia ir erdvinių modelių gamyba.

Su šiuo mąstymo tipu glaudžiai susietas mokinių gebėjimas pavaizduoti schema kurį nors matematinį objektą, operacijas su objektais ar santykius tarp jų. Įdomus šia prasme yra prancūzų matematiko Fransua Eduardo Anatolio Liukà (*Lucas*, 1842–1891) uždavinys: „Garlaivis iš uosto A į uostą B plaukia lygiai 6 paras. Kiekvienos dienos vidurdienį iš A į B ir iš B į A išplaukia reisinis garlaivis. Kiek tos pačios linijos garlaivių sutiks kiekvienas reisinis garlaivis, išplaukęs iš uosto B į uostą A?“ [127, p. 142]. Uždavinys lengvai išsprendžiamas naudojantis schema (40 pav.):

$$13 - 2 = 11 \text{ (garl.)}$$



40 pav.

Intuicija (lot. „*intuitio*“ – nuojauta) – ypatingas pažinimo būdas, kuriuo tiesiogiai surandama tiesa. Intuicijos sričiai priklauso tokie reiškiniai, kaip staiga surastas ilgai ir nesėkmingai ieškotas uždavinio sprendimas (aukščiau minėtas insaito reiškinys), greitas numatymas kokio nors žmogaus galimų poelgių ir pan. JAV pedagogas ir psichologas Dž. Bruneris intuityvaus mąstymo specifiką aiškina taip: „Analitinis mąstymas apibūdinamas tuo, kad atskiri jo etapai aiškiai išryškinti ir mąstantysis gali papasakoti apie juos kitam žmogui. Toks mąstymas paprastai realizuojamas sąlygiškai pilnai įsisąmoninant tiek jo turinį, tiek ir jį sudarančias operacijas <...>.

Priešingai, <...> intuityvusis mąstymas apibūdinamas tuo, kad jame nėra tiksliai apibrėžtų etapų. Jis turi tendenciją būti pagrįstas visos problemos suvokimu iš karto. Žmogus gauna atsakymą, kuris gali būti teisingas arba klaidingas, neįsisąmonindamas to proceso <...>, kurio metu jis rado ieškomąjį atsakymą... Paprastai intuityvusis mąstymas remiasi susipažinimu su pagrindinėmis žiniomis duotojoje srityje ir su jų struktūra, o tai leidžia jam realizuotis šuoliais, greitais perėjimais, praleidžiant atskiras grandis; šios ypatybės reikalauja patikrinti išvadas analitinio mąstymo būdais – indukciniais ar dedukciniais“ [118, p. 266].

Tradiciniame mokyklinio mokymo procese kartais daugiausia dėmesio skiriama tiksliam išmoktos medžiagos atgaminimui. O kartais net mokiniai mokomi ne tiek suprasti matematinius faktus, kiek paprastai pritaikyti atitinkamas formules ar taisykles uždaviniams spręsti nesuvokiant jų reikšmės ir ryšių. Taip mokiniai įpranta galvoti, kad svarbu būti tiksliam, nors tas tikslumas pasireiškia skaičiavimais, mechaniniu tipinių uždavinių sprendimu. Deja, kai kurie mokytojai taip moko abiturientus, rengdami juos valstybiniams egzaminams. Dž. Bruneris rašo, kad pats įtikinamiausias pavyzdys čia būtų euklidinės geometrijos išdėstymas mokiniams dedukciniu būdu, nesiremiant nei tiesioginiu operavimu geometrinėmis figūromis, nei propedeutiniu geometrijos mokymu pradinėse klasėse [118, p. 39].

Tačiau intuicijos vaidmens nereikia pervertinti. Aišku, žmogus su gerai išvystytu gebėjimu intuityviai mąstyti paprastai pasižymi apibrėžtais matematiniais gebėjimais, bet pati savaime intuicija negali užtikrinti gero dalyko mokėjimo. Dž. Bruneris teigia kad galbūt „reikia pirmiausia užtikrinti sąlygas intuityviai suprasti medžiagą ir tik po to supažindinti mokinius su labiau tradiciniais ir formaliais dedukcijos bei indukcijos metodais“ [118, p. 56]. Taip yra ir daroma: prieš sisteminį geometrijos kursą pradinėse ir V–VI klasėse yra nemaža propedeutinės geometrijos elementų bendrame matematikos kurse. Antai N. Cibulskaitės vadovėlio V kl. I dalyje yra skyriai „Geometrija. Skalė. Diagrama“ ir „Geometrinės figūros“, o II dalyje – „Erdviniai kūnai“ [37, 28], kuriuose propedeutiškai išdėstomi pagrindiniai planimetrijos ir stereometrijos klausimai.

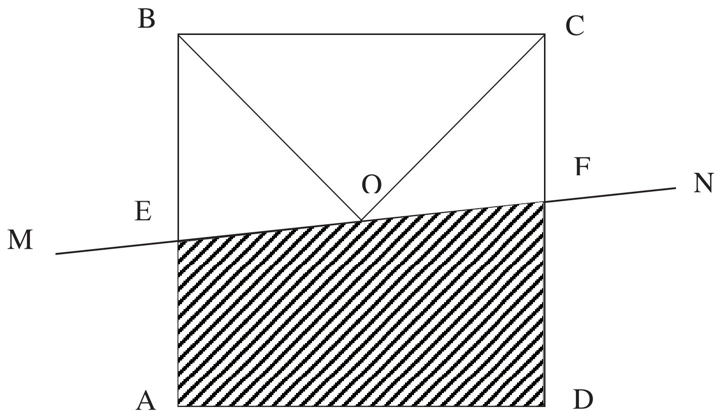
Dž. Bruneris klausia: „Ar labiau tikėtinas mokinių intuityviojo mąstymo vystymasis tada, kai dėstytojas pats mąsto intuityviai? <...>. Atrodo neįtikėtina, kad mokinys galėtų išlavinti savąjį intuityvųjį mąstymą arba pasitikėtų intuityviuoju mąstymo metodu, jei jis niekada nematė, kaip efektyviai jį naudoja suaugusieji. Tas mokytojas, kuris gali duoti spėjamą atsakymą į klausimą, kurį jam pateikia klasės mokiniai, o po to šį savo spėjimą gali kritiškai analizuoti, galbūt daug sėkmingiau suformuos savo mokinių mokėjimą naudotis intuicija, negu tas mokytojas, kuris analizuoja visus savo įspūdžius iš anksto <...>.

Ar reikia stimuliuoti mokinių spėjimus? Kaip sukurti situacijas, reikalaujančias įtampos intelektiniuose procesuose? Galbūt yra apibrėžtos sąlygos, kuriose spėjimai ir gali tam tikru laipsniu padėti formuoti intuityvųjį mąstymą. Tokius spėjimus reikia rūpestingai plėtoti. Tačiau mokykloje spėjimo iškėlimas dažnai smerkiamas ir lyg asocijuojamas su mokinio tingumu. Aišku, niekam nepatiktų, jei mūsų mokiniai nemokėtų atlikti kitų intelektinių operacijų, išskyrus spėjimus, nes po spėjimų visada turi eiti tikrinimas ir patvirtinimas tokiu mastu, koks yra reikalingas <...>. Tad ar ne geriau, jei mokiniai spėja, o ne visiškai praranda kalbos dovaną, kada jie negali staiga duoti teisingo atsakymo“ [118, p. 58–60]. Tad matematikos mokymo procese reikia visada skatinti mokinių *norą* spėti ir *gebėjimus* atspėti. Kartu reikia kiekvieną kartą atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad kiekvienas spėjimas suformuoja hipotezę, kurią reikia patikrinti ir pagrįsti, jei ji nebus atmesta. Spėjimu I–III klasėse yra grindžiamas lygčių sprendimas: $3 + \square = 8$, $15 - \square = 6$, $2 \times \square = 16$, $32 : \square = 4$, $\square : 3 = 15$ (I–II klasė), $15 + x = 63$, $80 : x = 16$ (III klasė). Toks lygčių sprendimo metodas vadinamas bandymų ir klaidų metodu.

Intuityvusis mąstymas pasireiškia ir taikant analogiją. Pvz., judantis taškas nubrėžia liniją, tad judanti linija nubrėžia paviršių. Intuityviajam mąstymui vystytis padeda ir tokių lygčių sprendimas: $x + x = x$, $x \times x = x$, $x^x = x$ ir t. t.

Kadangi funkcijos sąvokos idėja stebima visuose gamtos reiškiniuose, funkcijos matematinė sąvoka yra galingas realiosios tikrovės pažinimo instrumentas. Natūralu, kad matematinis mąstymas kaip sudedamąjį komponentą apimą ir *funkcinį mąstymą.* Funkcinis mąstymas pasižymi bendrųjų ir dalinių ryšių bei santykių tarp matematinių objektų ar jų savybių įprasminimu bei mokėjimu juos panaudoti. Kaip žinoma, vienas iš pagrindinių tarptautinio judėjimo už matematinio švietimo reformą reikalavimų buvo reikalavimas atkreipti ypatingą dėmesį į moksleivių funkcinio mąstymo lavinimą (F. Kleinas, Meranės programa, Vokietija, 1905). Pagrindiniai funkcinio mąstymo bruožai: 1) matematinių objektų įsivaizdavimas kaip judančių, kintančių; 2) operacinis – veiksmingas požiūris į matematinius faktus; 3) polinkis į matematinių faktų turiningas interpretacijas, daugiau dėmesio skiriant taikomiesiems matematikos aspektams. Kaip rodo didaktiniai ir psichologiniai tyrimai, vaizdūs kinetiniai ir fiziniai vaizdiniai, kurie yra funkcinio mąstymo pagrindas, organiškai susilieja su formaliais loginiais mąstymo komponentais. Funkcinis mąstymas vystosi tada, kai mokiniai įvaldo metodus, leidžiančius pereiti nuo vaizdaus kinetinio matematinių faktų vaizdavimo prie griežtesnio, nors ir mažiau dinamiško jų aprašymo aibių teorijos kalba. Taigi kyla problema: reikia lygiagrečiai, suderintai lavinti mokinių funkcinį ir aibių teorijos kalba grįstą mąstymą. Vienas šios problemos sprendimo būdų – uždavinių sistema, kurioje matematiškai išreiškiamos ir tiriamos konkrečios situacijos su aiškiai išreikštu funkciniu turiniu. Bendruoju atveju tokio uždavinio sprendimas susideda iš trijų etapų: 1) Nagrinėjamajame reiškinyje išskiriami pagrindiniai, esminiai ryšiai, atmetant neesminius, antraeilius, taip atliekami įvairaus lygio suprastinimai, daromos prielaidos. 2) Susiejant objektus, esančius nagrinėjamajame reiškinyje, su skaičiais ar geometrinėmis formomis, pereinama nuo realių santykių tarp tų objektų prie matematinių santykių (formulių, lentelių, grafikų). 3) Gautieji matematiniai santykiai tiriami, naudojantis jau žinomomis, seniai suformuluotomis ir išmoktomis matematinėmis taisyklėmis, o gautieji rezultatai vėl išreiškiami tiriamojo reiškinio terminais ir sąvokomis.

Paprasčiausi uždaviniai yra susiję su mintiniu figūrų perkėlimu ar jų deformacijomis. Pvz.: Kvadratą ABCD kerta tiesė MN, einanti per jo įstrižainių susikirtimo tašką O. Jei suktume tiesę MN, įtvirtinę ją taške O, ir leistume jai slinkti kvadrato kraštinėmis AB ir CD, tai ar keisis ir kaip keisis: a) užbrūkšniuotos figūros plotas; b) jos perimetras? (41 pav.).



41 pav.

Funkcinis mąstymas glaudžiai susijęs su *dialektiniu* (gr. „*dialektikē*“ – diskusijų menas) *mąstymu*, kuris pasižymi kitimo, dualumo (lot. „*dualis*“ – dvejopas), prieštaringumo, vienovės, tarpusavio sąryšio ir priklausomybės nustatymu tarp sąvokų ir jų savybių. Dialektinis mąstymas, be to, reiškia gebėjimą nešabloniškai, įvairiapusiškai pažvelgti į objektų ir reiškinių tyrimą, į čia iškylančių problemų sprendimą. Dialektiniam mąstymui būdingas taip pat skirtumo matymas tarp dedukcinių ir nededukcinių samprotavimų, taip pat įsisąmoninimas vienybės bei priešybės baigtinių ir begalinių dydžių sferose. Dialektinis mąstymas – pirmiausia gamtamokslinis mąstymas; jo santykis su matematiniu mąstymu nėra subordinacija pastarajam, o priešingai – visavertis matematinis mąstymas yra kartu ir dialektinis mąstymas.

Panašiai su matematiniu mąstymu yra susijęs *struktūrinis mąstymas,* kuriam būdingas gebėjimas matyti bendrąsias savybes ir santykius pačios įvairiausios prigimties objektuose, įvairiausių matematinių santykių universalumo suvokimas.

Utilitarinis (lot. „*utilitas*“ – nauda) *mąstymas* – praktiškas, taikomasis mąstymas, kuris mokant matematikos yra irgi nepaprastai svarbus.

Kūrybinis mąstymas apima visus mąstymo komponentus, išvardytus aukščiau, taip pat ir tai, ką vadiname matematiniu mąstymo stiliumi. Griežto vienareikšmio atsakymo į tai, kas yra kūrybinis mąstymas, nėra. Yra tik viena išaiškinta kūrybinės veiklos charakteristika – tai, kad šios veiklos rezultatas – naujos žinios. Tačiau ir ši charakteristika yra vienpusė, nes išreiškia veiklos produkto, o ne pačios veiklos savybę. Kūrybinio mąstymo savybės yra šios: 1) kūrybinio mąstymo rezultatas turi būti naujas ir vertingas tiek pačiam mąstančiajam, tiek kitiems žmonėms; 2) pats mąstymo procesas taip pat turi turėti naujoviškumo, pasireiškiančio tuo, kad pertvarkomos anksčiau priimtos idėjos, o kartais ir visiškai ar iš dalies jų atsisakoma; 3) kūrybiniam mąstymui įprasta tvirta motyvacija ir pastovumas, t. y. jis trunka ilgą laiką ar yra labai intensyvus.

Matematikos mokymo procesas iš esmės yra atskleidimas mokiniams to, kas jiems yra nauja, o mokslui – jau seniai žinoma. Nepaisant to, jį galima pavadinti *subjektyviai kūrybišku*, nors mokinio pažintinės veiklos rezultatai mokslui nėra nauji, bet jie yra nauji jam pačiam. Taigi mąstymo produktas gali būti ir ne kūrybinis, o pats mąstymas – kūrybinis. Pastaruoju laiku kūrybinis mąstymas ir kūrybinė žmogaus veikla apibūdinama vadinamąja *euristine veikla*.

Dažnai žmogus pasijunta esąs situacijose, kada kyla konfliktas tarp kokios nors veiklos reikalavimų ir jos atlikimo sąlygų. Visas žmogaus patyrimas, jo turimos žinios nepadeda jam rasti šio konflikto sprendimo kelių ir žmogui būtina sukurti naują veiklos strategiją (gr. „*stratēgia*“ – vadovavimas; nuo susiklosčiusių aplinkybių priklausomą veiksmų varianto pasirinkimą nustatančių taisyklių visuma), t. y. atlikti *kūrybos aktą* (lot. „*actus*“ – veiksmas). Tokia situacija vadinama problemine, o psichinis procesas, kurio metu sukuriama nauja strategija, randamas koks nors naujas sprendimas, vadinamas kūrybiniu (produktyviu) mąstymu arba euristine veikla.

Pagrindinė kūrybinės veiklos pasireiškimo priemonė matematikos mokymo procese yra pažintinių mokomųjų uždavinių sprendimas, čia naudingas yra kūrybinio matematinio mąstymo aprašymas, kurį pateikė D. Poja: „Mąstymą galima vadinti produktyviuoju, jei jis padeda išspręsti duotąjį konkretų uždavinį; mąstymą galima vadinti kūrybišku, jei jis sukuria priemones būsimųjų uždavinių sprendimui. Kuo didesnis skaičius ir kuo platesnė įvairovė uždavinių, kuriems gali būti pritaikomos sukurtosios priemonės, tuo aukštesnis kūrybinio mąstymo lygis.

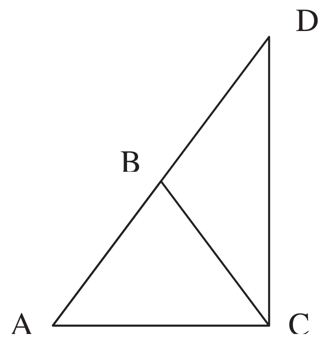
Kartais sprendžiančiojo uždavinį darbas gali būti pavadintas kūrybiniu net ir tuo atveju, jeigu jam nepavyko išspręsti uždavinio – pavyzdžiui, jei jo pastangos padėjo atrasti sprendimo būdus, pritaikomus sprendžiant kitus uždavinius. Sprendžiančiojo darbas gali būti laikomas kūrybiniu ir netiesiogiai, pavyzdžiui, jei jis palieka tegul neišspręstą, bet gerai suformuluotą uždavinį, kuris galiausiai kitiems sužadina vaisingų idėjų“ [135, p. 274].

Mokantis matematikos mokinių kūrybiškumas gali pasireikšti ne tik sprendžiant uždavinius, bet ir mokantis naują mokomąją medžiagą. Tačiau tada mokytojas turi mokinių veiklą pakreipti tiriamąja kryptimi. Tačiau tai nebus ekonomiška laiko atžvilgiu ir todėl, mokantis naujos medžiagos, kaip jau minėjome aukščiau, dažniausiai taikomi tik tiriamosios veiklos fragmentai (lot. „*fragmentum*“ – nuolauža, šukė; nedidelė visumos dalis).

Apibūdinant matematinį mąstymą yra tikslinga atkreipti dėmesį į mokinių *matematinį mąstymo stilių*. Tai keleto mąstymo savybių rinkinys.

1. Pirmoji savybė – *mąstymo lankstumas* – apibūdinamas: a) gebėjimu tikslingai varijuoti veiksmų būdus; b) žinių, mokėjimų ir įgūdžių sistemos pertvarkymu be didelių pastangų pasikeitus veikimo sąlygoms; c) perėjimo nuo vieno veiksmo būdo prie kito lengvumu, mokėjimu išeiti už įprasto veikimo būdo ribų.

Mąstymo lankstumą galima tikrinti tokiais uždaviniais: 1) Dviejų reginčiųjų vienas brolis aklas, bet tas brolis neturi normaliai reginčių brolių. Kaip tai gali būti? 2) Du žmonės kartu priėjo upę. Upės pakrantėje buvo vienvietė valtis. Tačiau abu žmonės sugebėjo persikelti per upę šia valtimi. Kokiu būdu tai jiems pavyko padaryti? 3) Rasti trikampio ABC pagrindą AC (42 pav.), jei trikampio ADC perimetras lygus 39 cm, o trikampio BDC perimetras lygus 24 cm?



42 pav.

4) 3 *l* 36°C temperatūros vandens sumaišoma su 4 *l* 15°C temperatūros vandens. Kokios temperatūros vanduo yra dabar?

Mąstymo lankstumo priešingybė yra *mąstymo bukumas.*

2. *Mąstymo aktyvumas* pasižymi dėjimu pastangų išspręsti kurią nors problemą, noru išspręsti šią problemą, išnagrinėti įvairius požiūrius į jos sprendimą, ištirti įvairius šios problemos iškėlimo variantus atsižvelgiant į kintančias sąlygas ir t. t. Lavinti šią mąstymo savybę padeda to paties uždavinio sprendimo įvairių būdų nagrinėjimas, įvairūs tos pačios matematinės sąvokos apibrėžimai, gautojo rezultato tyrimas ir t. t. Aktyvumo priešingybė – *pasyvumas.*

3. *Mąstymo kryptingumas* apibūdinamas siekiu pasirinkti veiksmus kuriai nors problemai išspręsti, nuolat orientuojantis į šios problemos iškeltą tikslą, taip pat siekiu surasti trumpiausius jos sprendimo kelius. Šios mąstymo savybės buvimas – svarbi aplinkybė, užtikrinanti sėkmę ieškant matematinių uždavinių sprendimo planų, mokantis naują medžiagą ir t. t. Tam padeda specialiai parinkti uždaviniai, įvedantys į naują temą ir atskleidžiantys mokiniams šios temos mokymosi prasmę ir seką.

Mąstymo kryptingumas leidžia kuo ekonomiškiau, trumpiausiu keliu atlikti užduotis. Pvz., pasakojama, kad vieno Vokietijos miestelio pradžios mokyklos mokytojas, norėdamas palikti savo mokinius kuriam laikui vienus, davė, jo manymu, jiems tokią užduotį, kuriai išspręsti reikėjo nemaža laiko, tad mokytojas manė per tą laiką galėsiąs susitvarkyti savo reikalus. Ta užduotis buvo: „Apskaičiuoti visų skaičių nuo 1 iki 100 sumą“. Tačiau tiek mokytojas, tiek mokiniai buvo nustebinti, kai vienas mokinys labai greitai pakėlė ranką ir pasakė atsakymą: 5050. Paklaustas, kaip jis rado atsakymą, jis paaiškino:

$$1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100 = \underbrace{(1+100)+(2+99)+(3+98)+...}_{50\,por\text{ų}} = 101 \times 50 = 5050.$$

Tas mokinys buvo Karlas Frydrichas Gausas (*Gauss,* 1777–1855), vėliau tapęs žymiausiu savo meto pasaulio matematiku.

Mąstymo kryptingumas glaudžiai susijęs su tokia asmenybės savybe, kaip *žinių troškimas.* Jo nereikėtų painioti su paprastu *smalsumu*. Pirmoji savybė praturtina mokinio žinias ir patyrimą būtent dėl jo mąstymo kryptingumo, o antroji – smalsumas – virsdamas savitiksliu, stabdo žmogaus žinių siekį, tenkinasi pasiekto smalsumo patenkinimu.

Mąstymo kryptingumo priešybė – *mąstymo netikslingumas.*

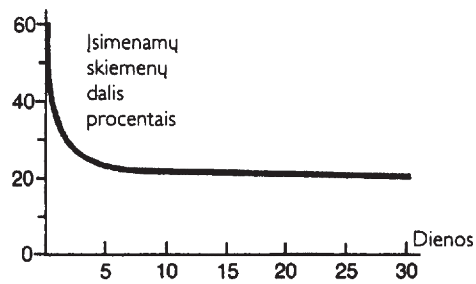
4. *Atminties pasirengimas* – savybė, leidžianti ekonomiškai mąstyti. Priklausomai nuo įsimenamos medžiagos turinio ir nuo žmogaus veiklos įsiminimo metu, atmintis skirstoma į: *motorinę* (lot. „*motor*“ – judintojas), *emocinę* (pranc. „*émotion*“ – jausmas), *vaizdinę* (kuri dar skirstoma į *regimąją, girdimąją, lytėjimo, skonio, uoslės*), *žodinę loginę* (pastaroji būdinga tik žmogui) ir *eidetinę* (gr. „*eidētikos*“ – priklausantis vaizduotei); ji būdinga kai kuriems žmonėms – *eidetikams*, pasireiškia gebėjimu išlaikyti atmintyje ir gyvai, su visomis smulkmenomis atgaminti daiktų ir reiškinių vaizdus. Konkrečiame procese visos atminties formos reiškiasi kartu, bet nėra lygiareikšmės (pvz., mokymo procese reikšmingiausia yra žodinė loginė atmintis). Pagal veiklos tikslingumą skiriama *valinga* (atminties procesai – tikslingi, iš anksto numatyti) ir *nevalinga* (įsiminimas ir atsiminimas be specialaus išankstinio ketinimo) *atmintis*; pagal įsimenamos medžiagos supratimo laipsnį – *įprasmintoji* ir *mechaninė atmintis*; pagal įsiminimo ir išlaikymo trukmę – *fotografinė (momentinė), trumpalaikė, operatyvinė* (lot. „*operatio*“ – veikimas) ir *ilgalaikė atmintis*; pagal atkūrimo pilnumą – *atkuriančioji, atpažįstančioji* ir *palengvinančioji atmintis*; pagal įsimenamos informacijos įprasminimo bei supratimo laipsnį – *mechaninė* ir *loginė atmintis*, pagal įsimenamų žinių laikymą – *semantinė* (sąvokos, simboliai, gramatikos ir matematikos taisyklės, formulės ir t. t.) bei *epizodinė* (gr. „*epeisodion*“ – trumpalaikė, mažareikšmė įvykio dalis, neturinti lemiamos reikšmės visam įvykiui; konkrečios vietos, konkretaus laiko įvykiai, biografiniai duomenys ir pan.). Sąmonės kontroliuojama atmintis vadinama *eksplicitine* (lot. „*explicitus*“ – išaiškintas), nekontroliuojama – *implicitine* (lot. „*implicitus*“ – supainiotas). *Atminties individualios ypatybės* priklauso nuo asmeninių savybių, poreikių, interesų, polinkių, įpročių. Jos pasireiškia nevienodu įsiminimo greičiu, tikslumu, tvirtumu, atkūrimo lengvumu ir pilnumu. Atsižvelgiant į tai, kokia medžiaga (konkreti ar abstrakti) greičiau ir tvirčiau prisimenama, skiriami

trys atminties tipai: *vaizdinis konkretusis, žodinis abstraktusis* ir *tarpinis*. Atmintis yra būtina pažinimo veiklos grandis. Savo ruožtu atmintis priklauso nuo tos veiklos pobūdžio: tikslų ir uždavinių, motyvų ir konkretaus turinio.

Mokantis matematikos tikslinga ugdyti visų rūšių atmintį. Pvz., mokytojo duodamas nurodymas mokiniui, dirbančiam prie klasės lentos: „Rašyk ir kalbėk“ padeda vystyti motorinę ir žodinę loginę atmintį.

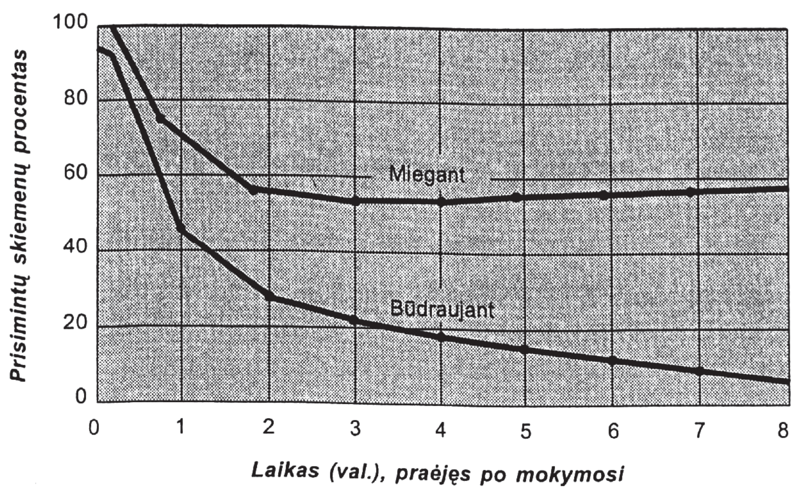
Atminties pasirengimas reiškia ir gebėjimą greitai ir teisingai atgaminti būtiną informaciją.

Įsiminimo priešybė – *užmiršimas*. 1885 m. vokiečių psichologas Hermanas Ebinghauzas (*Ebbinghaus*, 1850–1909) sudarė *užmiršimo kreivę* (43 pav.), pagal kurią žmogus jau kitą dieną užmiršta apie 25 % to, ką išmoko praėjusią dieną (su sąlyga, jei nebuvo kartota). Kaip mokomąją medžiagą jis naudojo beprasmius skiemenis [52, p. 122].



43 pav.

Beje, tiriant užmiršimą per parą [95, p. 316], gauti dar įdomesni rezultatai (44 pav.):



44 pav.

Tačiau užmiršimas turi ir nemaža naudos: užmirštant smulkius ir nereikšmingus faktus, atmintis be reikalo neperkraunama ir išsaugoma galimybė įsiminti gana didelės apimties ir turinio informaciją. Iš esmės atminties pasirengimas reiškia gebėjimą greitai įsiminti bei atgaminti svarbią informaciją. Todėl matematikos mokytojas turi ypač rūpintis tuo, kad atmintis nebūtų perkrauta nereikalinga ar nereikšminga informacija.

Atminties pasirengimas treniruojamas ypač efektyviai tada, kai kokių nors faktų įsiminimas grindžiamas šių faktų supratimu. Todėl taisyklių „kalimas" siekiant tik po to jas taikyti yra ne tik neproduktyvus, bet ir žalingas. Mokantis matematikos mokinių atmintį stiprinti padeda: atitinkamos medžiagos mokymosi motyvacija, medžiagos, kurią reikia įsiminti, plano sudarymas, platus lyginimo, klasifikacijos ir kt. būdų naudojimas.

5. *Atminties platumas* apibūdinamas gebėjimu formuoti apibendrintus veiklos būdus, kuriuos galima perkelti, taikyti daliniais, netipiniais atvejais. Ši atminties savybė pasireiškia mokinio gebėjimu suvokti naujus faktus pažįstamose situacijose ir tuoj pat juos perkelti bei pritaikyti neįprastoje situacijoje. Pvz., išvedus kvadratų skirtumo formulę: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, mokinys, pasižymintis atminties platumu, lengvai pastebės, kad: $1{,}75^2 - 0{,}25^2 = (1{,}75 + 0{,}25)(1{,}75 - 0{,}25) = 2 \times 1{,}5 = 3$. Šiai atminties savybei ugdyti padeda klasifikacijos, apibendrinimo taikymas. Priešingybė jai – *atminties (mąstymo) siaurumas*.

6. *Mąstymo gilumas ir savikritiškumas* – savybė, apibūdinama nuolatiniu savo veiksmų tikrinimu, apytiksliu ieškomo rezultato numatymu (iki hipotezių formulavimo), samprotavimų, atliktų indukcijos, analogijos, intuicijos būdu, rezultatų tikrinimu. Mokytojai turi reikalauti iš mokinių ir mokyti juos ieškoti savo klaidų, savarankiškai jas taisyti. Čia ypač vertingi matematiniai paralogizmai ir sofizmai, kuriuose mokiniai turi būti pratinami pastebėti samprotavimo klaidas. Naudingi ir tokio tipo pratimai:

$$(57 - 28) - 13 = 57 - (x - 13).$$

Šios savybės priešingybė – *mąstymo nekritiškumas*, kuris, deja, būdingas daugeliui mokinių.

Savybės, būdingos matematiniam mąstymo stiliui: *aiškumas, tikslumas, kalbos ir užrašų lakoniškumas* (gr. „*lakōnikōs*" – trumpai, glaustai), *mąstymo savarankiškumas, įrodomumas* nereikalauja ypatingų komentarų, tuo labiau kad šias savybes įvairiais aspektais aptarinėjome aukščiau.

3.3.4. Kūrybiškumo skatinimas ir erdvinės vaizduotės ugdymas

Mokymas turi būti organizuojamas taip, kad mokiniai, vadovaujami mokytojo, turi rodyti iniciatyvą, aktyvumą atrasdami taisykles, teoremas, jų įrodymus, uždavinių sprendimus. Žemesnėse klasėse tie atradimai yra indukciniai, juose apibendrinami stebėjimų, bandymų rezultatai. Vėliau mokiniai, vadovaujami mokytojo, ieško ir atranda teoremų įrodymus, uždavinių sprendimo planus ir būdus. Mokiniai dažnai gauna užduotis įrodyti, nubraižyti, išspręsti, išvesti. Tokioms užduotims atlikti taip pat reikia aktyvumo, iniciatyvos, kūrybiškumo, taigi ugdomos ir šios savybės.

Visur, kur tik taikomi matematiniai metodai: gamtos moksluose, technikoje, ekonomikoje, vadyboje aukščiau aptartos savybės yra būtinos.

Erdvinis mąstymas – ypatinga vaizduotės rūšis. Jo esmė: sąmonė, panaudodama duotus erdvinius vaizdus, perdirba juos į naujus, sukuria naują erdvinę situaciją. Ji reikalinga irgi ne tik matematikoje, bet ir fizikoje, astronomijoje, chemijoje, technikoje, statyboje, architektūroje, skulptūroje. Tad matematikos mokymasis, ugdantis erdvinį mąstymą, pasitarnauja ir kitiems mokslams.

IX. LOGINIO MĄSTYMO UGDYMAS MOKANT MATEMATIKOS LIETUVOS PRADINIŲ IR VYRESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIUS

1. APIE MATEMATIKOS PAMOKŲ STEBĖJIMĄ LIETUVOS MOKYKLOSE

Vienas iš efektyviausių mokymosi ir mokslinio tyrimo metodų matematikos didaktikoje yra pamokų stebėjimas. Autoriaus patirtis šioje srityje yra nemaža: pradinių klasių matematikos pamokas stebėti ir analizuoti (bei pats jas vesti) autorius pradėjo daugiau kaip prieš 50 metų, 1955 m., kai pats mokėsi Ukmergės pedagoginėje mokykloje. Nors tiesiogiai dirbti pradinėse klasėse autoriui, gavusiam pradinės mokyklos mokytojo diplomą, neteko, tačiau stebėti ir vertinti teko daugelio kurso draugų, kolegų, pavaldinių vedamas pamokas – daugiau kaip 12 metų dirbant mokyklų direktoriumi, visos Lietuvos mokytojų – apie 20 metų dirbant Respublikiniame mokytojų tobulinimosi institute (toliau – RMTI), parodomąsias mokytojų ir studentų – dirbant Šiaulių pedagoginiame institute (toliau ŠPI; dabar universitetas) bei Vilniaus aukštesniojoje pedagogikos mokykloje (dabar Vilniaus kolegijos Pedagogikos fakultetas). Pats autorius 1957–1978 ir 1986–1989 m. turėjo visą ar nevisą matematikos mokytojo darbo krūvį Švenčionių raj. Stoniūnų ir Telšių raj. Lauko Sodos septynmetėse, Mitkaičių ir Degaičių aštuonmetėse bei Ubiškės vidurinėje, Vilniaus XIII vakarinėje, specialiojoje profesinėje technikos mokykloje Nr. 2 (mergaičių nepilnamečių nusikaltėlių kolonijoje), Vilniaus raj. Mickūnų vidurinėje mokykloje. Direktoriaujant ir dirbant RMTI taip pat teko stebėti daug matematikos pamokų vyresniosiose klasėse, einant antraeiles pareigas Vilniaus pedagoginiame institute bei universitete (toliau VPI, VU) – stebėti parodomąsias mokytojų ir studentų pamokas. Tačiau mokytojų vedamas pamokas teko stebėti maždaug prieš 20 metų, studentų – prieš 10 metų. Todėl, rinkdamas medžiagą monografijai apie loginio mąstymo ugdymą mokant matematikos, autorius paprašė Vilniaus miesto, Anykščių, Rokiškio bei Skuodo rajonų švietimo skyrių vadovų, kad jam leistų lankytis jiems pavaldžiose mokyklose ir stebėti geriausių pradinių ir vyresniųjų klasių mokytojų matematikos pamokas. Pradinėse klasėse Vilniuje stebėtos 4, Anykščių rajone – 12, Rokiškio rajone – 8 pamokos, Skuodo raj. Mosėdžio gimnazijoje – 1 pamoka. Vyresniosiose klasėse Vilniuje stebėtos 3, Anykščių rajone – 13, Rokiškio rajone – 10, Skuodo raj. Mosėdžio gimnazijoje – 1 pamoka. Įdomiausius, labiausiai pavykusius stebėtų pamokų momentus norisi čia ir aptarti, laikantis tokio plano: a) didaktinių principų realizavimas pamokose; b) mokymo formų ir metodų kūrybiškas taikymas; c) loginio mokinių mąstymo ugdymas. Pradžioje aptarsime pradinių klasių mokytojų pamokas.

2. STEBĖTŲ PRADINIŲ KLASIŲ MOKYTOJŲ PAMOKŲ APŽVALGA

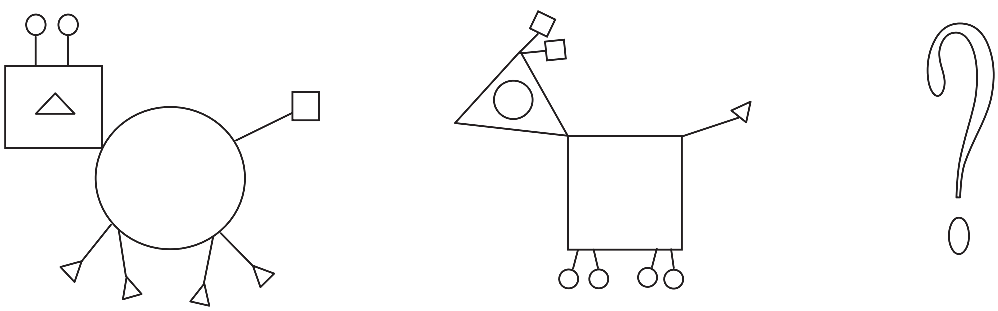
Kaip ir dera pradinėse klasėse, stebėtos pamokos pasižymėjo mokymo vaizdumu. Vilniaus Antano Vienuolio pagrindinės mokyklos II klasėje vyr. mokytoja Genė Liutkevičienė, aiškindama skaičių 1 ir 10 dauginimą, vartojo iš popieriaus iškirptas „snaiges“, o iliustruodama dauginamųjų keitimą vietomis, panaudojo plakatėlius, kuriuose buvo: a) 3 eilutės po 5 skrituliukus; b) 3 eilutės po 3 trikampiukus; c) 2 eilutės po 6 kvadratėlius. Pvz., paskutinis plakatėlis jai padėjo vaikams akivaizdžiai pademonstruoti, kad $6 \times 2 = 2 \times 6 = 12$. Tos pačios mokyklos vyr. mokytoja Jolanta Montvidienė, ketvirtos klasės mokinius supažindindama su milijonu, demonstravo vaikams 1 m^2 ploto kartono gabalą, apklijuotą milimetriniu popieriumi. Suformulavo problemą: „Per kiek laiko padėtume po taškelį į kiekvieną kvadratinį milimetrą, jei per 1 *min* padėtume po 80 tokių taškelių, o kasdien dirbtume po 4 *h*?“ Beje, problemą išsprendė ne iš karto: leido vaikams paspėlioti (vaikų atsakymai pasiskirstė nuo 15 *min* iki 1 savaitės). Po to atliko su jais eksperimentą – į nedidelius milimetrinio popieriaus gabalėlius vaikai 1 *min* dėliojo taškus į kiekvieną kvadratinį milimetrą. Suskaičiavus kiekvieno padėtus taškus, nustatyta, kad vidutiniškai per minutę padedama 80 taškų, dienos darbo laikas pasirinktas pagal mokinio darbo dienos mokykloje vidutinį ilgumą. Taip pat J. Montvidienė didelius skaičius mokė skaityti ir rašyti, panaudodama daugiaženklių skaičių numeracijos lentelę su kišenėmis, į kurias įdėdavo reikiamus kilnojamuosius skaitmenis. Vilniaus šv. Kristoforo vidurinės mokyklos vyr. mokytoja Jolita Stanelienė, IV klasėje supažindindama mokinius su simetriškomis figūromis, vaikų grupėms išdalijo figūras: lygiakraštį trikampį, „eglutę“, nelygiašonę trapeciją, aštuoniakampę žvaigždę ir pasiūlė nustatyti, kurias figūras (ir keliais būdais) galima sulenkti taip, kad abi figūros dalys sutaptų. Sprendžiant uždavinius iš B. Balčyčio vadovėlio, jų sprendimas irgi buvo iliustruotas lankstomais stačiakampiais, kvadratais. Atliko mokiniai ir nedidelį laboratorinį darbą: sulenkė po stačiakampį popieriaus lapelį ir kiekvienas iškirpo po savitą simetrišką figūrą. Su dviem vienodo spindulio skrituliais, sulankstytais taip, kad padalijo juos į 8 lygias dalis ir po to įkirpo pagal spindulį, pademonstravo trupmenas: ½, ¼, ⅛. Tos pačios mokyklos IV klasėje vyr. mokytoja Sonata Urbonienė pamokoje, skirtoje diagramų ir piktogramų kartojimui, panaudojo skritulinę mokinio paros laiko paskirstymo diagramą, kartodama mokinių diagramų skaitymo įgūdžius. Sudarant stulpelinę diagramą, mokiniai lentoje užpildė anketą „Keli asmenys yra mano šeimoje?“, kurioje atitinkamose grafose: 2-jų, 3-jų, 4-rių, 5-kių ir daugiau kiekvienas mokinys padėjo kryžiuką, paskui pagal šią anketą vaikai savarankiškai nubraižė diagramas. Ypač gausu vaizdinių mokymo priemonių buvo Anykščių A. Vienuolio gimnazijos II klasės mokytojos metodininkės J. Karosienės pamokoje. Ant kiekvieno stalo stovėjo „užduočių kraitelė“ ir, atlikdami atitinkamas užduotis, vaikai pasiimdavo reikiamas priemones. Pavyzdžiui, spręsdami uždavinį apie litų banknotų keitimą smulkesniais banknotais, vaikai iš kraitelių pasiėmė litų banknotų kopijas. Tos pačios mokyklos mokytoja metodininkė Žibutė Būtėnienė IV klasėje demonstravo tikrą elektros skaitiklį ir panaudojo komunalinių paslaugų atsiskaitymo knygelės lapelių kopijas sprendžiant uždavinį apie elektros suvartojimą šeimoje. Ši mokytoja panaudojo ir simbolius – sutartinius ženklus (geometrines figūras) skaičiams vaizduoti pratimuose:

$\otimes + \otimes + \otimes = 12$ $\qquad$ $\otimes + \square \times \otimes = \lozenge$

$\square \times \square \times \square = 1$ $\qquad$ $\lozenge \times \otimes : \otimes = \lozenge$

$\lozenge \times \otimes \times \square = \Delta$ $\qquad$ $\otimes : \square \times \lozenge = \Delta$

Jos kolegė mokytoja metodininkė R. Polikevičiūtė-Kirtiklienė II klasėje mintinio skaičiavimo metu vaikams pasiūlė pratęsti 2 aplikacijų sekas: 1) grybų – baravykas, 2 musmirės, baravykas ir 2) vaisių – braškė, obuolys, braškė. Sekų elementai ypač meniškai pagaminti. Dar vieną seką vaikai papildė tokiu būdu: „Valgyti vaisių atkeliavo 3 draugai robotai – marsiečiai, – pasakojo mokytoja. – Du čia pavaizduoti. Koks buvo trečiasis robotas?“ ir po to buvo atidengtas piešinys (45 pav.):



45 pav.

Vaikai turėjo nupiešti trečiąjį robotą ir priklijuoti šalia klaustuko. Po to jų piešiniai buvo aptarti, nustatyta, kas piešinius atliko teisingiausiai, gražiausiai.

Anykščių rajono Kavarsko vidurinės mokyklos mokytoja metodininkė Janina Sereičikienė naudojo daug plakatinių vaizdinių mokymo priemonių. Viena jų – lentelės ir piktogramos kombinacija:

Gatvė	**Namų skaičius**	
Algirdo	300	$\square\square\square\square\square$
Birutės	210	$\square\square\square\lozenge$

Kam lygūs $\square$ ir $\lozenge$?

Anykščių Jono Biliūno gimnazijos III klasėje vyresnioji mokytoja G. Verbickienė mintinio skaičiavimo metu pateikė užduotį – priklijuoti „kirminuko narelį“ su užrašais: 1 km, 24 h, 1 min, 1 m, 1 h, 0,5 Lt, 1 Lt, ½ h, 1 kg, 1 cm ant lentoje parašytų dydžių: 1000 m, 1 para, 60 s, 100 cm, 60 s, 50 ct, 100 ct, 30 min, 1000 g, 10 mm (priekyje priklijuota „kirminuko galva“). Tos pačios gimnazijos vyresnioji mokytoja Daiva Verbickienė ir Anykščių Antano Baranausko vidurinės mokyklos vyresnioji mokytoja E. Bražiūnienė, taikydamos aplikacijas – skrituliukus – magnetinėje lentoje ir sagų bei šiaudelių rinkinius ant mokinių stalų, sudarė su jais keturių daugybos lentelę tokiu būdu:

$4 \times 2 = 8$:|:|:|: $2 \times 4 = 8$ ÷÷÷÷ ir t. t.

E. Bražiūnienė prie lentos pastačiusi knygas, ant kurių užrašyta: 9 Lt, 7 Lt, 7 Lt, 7 Lt, prašė vaikus sugalvoti uždavinį. A. Baranausko vidurinės mokyklos mokytoja metodininkė D. Guobužienė savo pirmokams savarankiškų darbų metu teikė užduotis lapeliuose, parengtuose kopijavimo aparatu:

Įsižiūrėkite, kokia tvarka nubraižytos figūros ir užrašyti skaičiai. Baikite pildyti lenteles (15 ir 16 lent.) tokia pat tvarka:

15 lentelė

⊗	Δ	⊗	Δ	⊗
Δ	⊗			
⊗	Δ			

16 lentelė

1	**2**	**3**	**4**	**5**
5	**4**	**3**	**2**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
5				

Mokytoja metodininkė L. Venslovienė (Rokiškio raj. Juodupės pradinės mokyklos direktoriaus pavaduotoja) IV klasės mokiniams išdalijo reklaminio lapelio su kalėdinėmis nuolaidomis pertvarkytas kopijas. Juose pavaizduotos prekės ir jų kainos. Kainą su nuolaida mokytoja užklijavo. Mokytoja pasakė, kad nuolaida sudarė devintąją dalį prekės kainos. Vaikai turėjo savarankiškai apskaičiuoti kainą su nuolaida. Pagal plakatėlius II klasės mokiniai sudarinėjo ir sprendė uždavinius Rokiškio

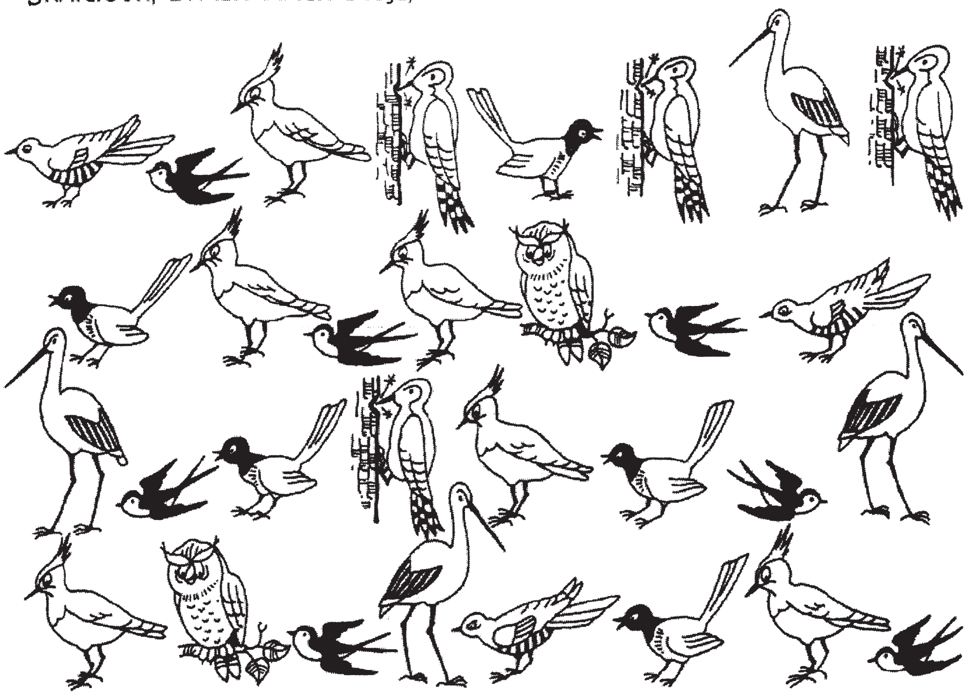
„Romuvos“ gimnazijoje (vyresnioji mokytoja R. Rumšienė), o mintinį skaičiavimą ši mokytoja organizavo tokiu būdu. Lentoje priklijuotas stilizuotas eglutės piešinys, šalia jos – eilė skritulių. Pasakius mokytojai, pvz., 65 – 8, mokinys, pasakęs teisingą atsakymą 57, suranda skritulį, kuriame parašytas šis skaičius, ir perkelia jį ant eglutės. Vėliau suskaičiavo visus perkeltuosius skritulius – „žaisliukus“, jų rado 13. Mokytoja paklausė: „Kelinta šiandien diena?“ (gruodžio 13). O tada pasiūlė apskaičiuoti: „Kiek dienų liko iki šv. Kalėdų?“ Kita šios mokyklos vyresnioji mokytoja R. Repšienė I klasėje mintinio skaičiavimo metu pasitelkdama „namukus“ pakartojo skaičių 6, 7, 8 ir 10 sandarą iš dviejų dėmenų. Rokiškio raj. Juodupės pradinės mokyklos vyresnioji mokytoja edukologijos magistrė R. Barauskienė III klasėje įvairioms kampų rūšims demonstruoti panaudojo muziejinį eksponatą – labai gražią senovinę vėduoklę. Toliau vaikai ieškojo įvairių rūšių kampų geometrinių figūrų popieriniuose modeliuose, nustatinėdami laikrodžio modelio rodyklėmis atitinkamą laiką, kartu aptardami, kokį kampą sudaro laikrodžio rodyklės. Rokiškio „Ąžuoliuko“ mokyklos-darželio III klasėje vyresnioji mokytoja G. Narkūnaitė, panaudodama skaidrią plastmasinę dėžutę nuo maisto produktų ir vatines „sniego gniūžtes“, užpildančias tą dėžutę, su vaikais apskaičiavo „gniūžčių“ kiekį įvairiais būdais: $2 \times 4 + 2 \times 4 = 2 \times 8 = 2 \times 4 \times 2 = 4 \times 4 = 16$. Tos pačios mokyklos II klasės mokytoja I. Šutienė pamokoje plačiai naudojo laikrodžių modelius su pasukamomis rodyklėmis. O pamokos temą skelbdavo taip. Iš pradžių mokytoja pasiūlė uždavinį: „Turinys 25, atėminys 9. Koks yra skirtumas?“ Teisingai atsakęs mokinys surado lentoje priklijuotą kvadratėlį su skaičiumi 16, apvertė jį ir priklijavo virš iš anksto nubrėžtos atkarpos. Prieš klasę taip buvo atsukta raidė „L“. Kita užduotis: „Pirmas dėmuo 36, antras dėmuo 7. Kam lygi suma?“ dešifravo raidę „A“. Dar 4 užduočių sprendimas dešifravo likusią pamokos temos pavadinimo dalį – „IKAS“. Panašiai elgėsi ir jau minėta L. Venslovienė. Jos mokiniai, atsakydami į klausimus, pakartojo atitinkamus matematinius ir ekonominius terminus: skirtumas, kaina, litas, prekė, nuolaida, plotas, suma, jais užpildė kryžiažodį ir vertikaliai jame perskaitė pamokos temą „KALĖDOS“. Skuodo raj. Mosėdžio gimnazijos vyresnioji mokytoja D. Būtienė, mokydama atimties peržengiant dešimtį, sumaniai panaudojo mokymo vaizdumą. Pvz., atimant (15 – 7) ant mokytojos staliuko mokiniai pastatė du kubelių stulpelius, kurių viename 10, kitame 5 kubeliai. Atimant pirmuoju būdu: 15 – 5 – 2 pirmiausia nuimtas antrasis stulpelis, o po to 2 kubeliai paimti ir iš pirmojo stulpelio ir, suskaičiavus likusius, gautas skirtumas – 8. Atimant antruoju būdu, iš pirmojo stulpelio paimti 7 kubeliai, tad jame liko 3 kubeliai, pridėjus antrojo stulpelio 5 kubelius, vėl gauti 8 kubeliai. Įtvirtinant žaista „Parduotuvė“. Pastačius keletą žaislų – „prekių“ ir davus atitinkamą „pinigų“ sumą (monetų ir banknotų kopijas), klausta, kiek pinigų liks, nupirkus vieną ar kitą „prekę“. Beje, ši mokytoja mintinio skaičiavimo metu panaudojo istorinį eksponatą – kočėlą, mokiniai skaičiavo jo dantis.

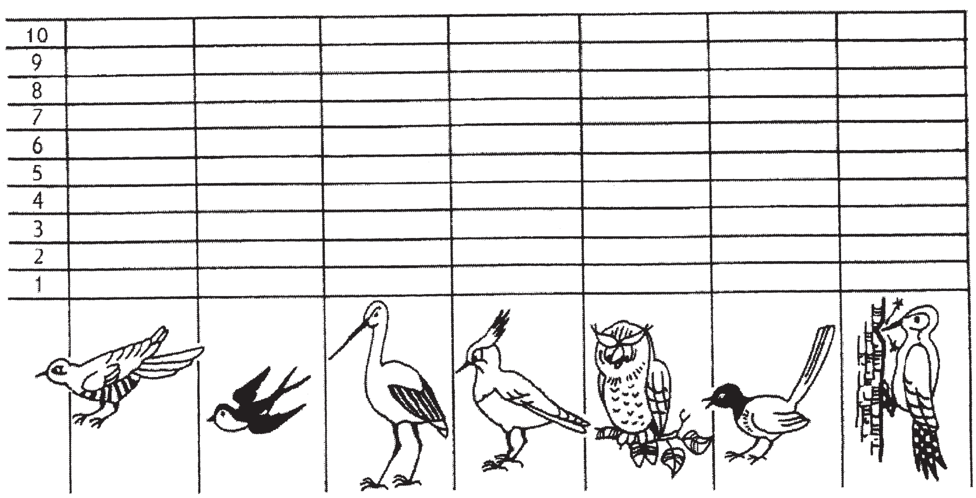
Daugelyje stebėtų pamokų pavyko pamatyti nemaža tarpdalykinės integracijos pavyzdžių. Nemaža buvo ir integracijos su realiu gyvenimu (jau ir aukščiau minėtuose pavyzdžiuose tai buvo ryšku mokytojų J. Montvidienės, S. Urbonienės, J. Karosienės, L. Venslovienės, R. Rumšienės, I. Šutienės pamokose). Su rankų darbų pamokomis sietos dvi stebėtos pamokos. Popieriaus lankstymas, karpymas plačiai naudotas vilnietės J. Stanelienės pamokoje. Su popieriaus lankstymu savo matematinį diktantą susiejo ir Anykščių raj. Kavarsko vidurinės mokyklos II klasės mokytoja metodininkė Nijolė Kvieskienė: vaikai matematinio diktanto atsakymus ir savo vardus užrašė ant čia pat pamokoje išlankstytų „lėktuvėlių" ir diktanto bei pamokos pabaigoje jie nuskriejo pas mokytoją. Kita šios mokyklos mokytoja metodininkė J. Sereičikienė IV klasėje integravo matematiką su gamtos pažinimu, iškabindama plakatą su 10 medžių amžiumi. Vaikai suapvalino medžių amžių iki pilnų dešimčių ir nubrėžė gulsčią stulpelinę diagramą:

Medžiai	**Jų amžius**	**Apytikslis amžius**	**1 langelis – 20 metų**
Šermukšnis	84	80	
Beržas	119		
Obelis	196		
Uosis	297		
Vyšnia	299		
Liepa	998		
Ąžuolas	1195		
Pušis	96		
Klevas	596		
Maumedis	495	(mokiniai užpildė III ir IV plakato stulpelius).	

Pagal B. Balčyčio vadovėlio užduotis vilnietė S. Urbonienė glaudžiai siejo diagramų braižymą ir Lietuvos geografiją. Aptardama mokinio paros laiko diagramą, ji akcentavo sveikos gyvensenos teiginį – ilgiau kaip 2 h mokiniams sėdėti prie kompiuterio ar televizoriaus yra labai nesveika. Anykščių J. Biliūno gimnazijos III klasėje mokytoja G. Verbickienė, spręsdama uždavinius apie sunaudotos elektros energijos apskaičiavimą bei naudojimąsi liftu, kalbėjo apie energijos taupymą (dieninė ir naktinė apskaita), aptarė, kur Anykščiuose yra liftai. Kita šios mokyklos vyresnioji mokytoja A. Grinienė, spręsdama su IV klasės mokiniais atitinkamą uždavinį, aptarė saugaus eismo problemas. Su realiu gyvenimu susijusios aukščiau minėtos rokiškėnės I. Šutienės ir juodupietės vyresniosios mokytojos Daivos Kavaliauskienės pamokos, skirtos supažindinimui su laikrodžiu. Anykščių A. Baranausko vidurinės mokyklos mokytoja D. Guobužienė I klasėje išdalijusi vaikams užduočių lapelius su nupieštais paukščiais ir lentele (vieno lapelio pavyzdys – 46 pav.), kurią užpildžius gaunama stulpelinė diagrama, aptarė ir gamtamokslinius klausimus: priminė paukščių globą (lesyklos – žiemą, inkilai – pavasarį), aptarė paukščių gripo pavojų (neliesti sergančių ar kritusių paukščių, pranešti apie juos suaugusiems).

SKAIČIUOK, ŽYMĖK DIAGRAMOJE, ATSAKYK.





1. Kur išskrenda paukščiai rudenį?
2. Kurie pasilieka žiemoti?
3. Kurių paukščių pažymėjai mažiausiai? daugiausiai? po lygiai?
4. Kada paukščiai sugrįžta?

46 pav.

Vilniaus A. Vienuolio pagrindinės mokyklos mokytoja J. Montvidienė mokinių žinias apie milijoną iliustravo pavyzdžiais: 1) Lietuvoje gyvena 3 mln. gyventojų, o Japonijoje – 27 mln. 2) Pirmykščiai žmonės gyveno prieš 2 mln. metų. 3) Vabzdžių ir voragyvių rūšių Žemėje yra daugiau kaip 1 mln. 4) Galaktika – didžiulis žvaigždžių telkinys. Pakeltą rankos nykštį laikyk ištiestos rankos atstumu nuo akių. Visatos gabalėlyje, kurį užstoja nykščio nagas, yra apie 50 mln. galaktikų. Visata yra milžiniška. 5) Saulė yra nutolusi nuo Žemės per 150 mln. km. Kaip papildomus vadovėlio ir pratybų sąsiuvinio užduotis atlikusiems mokiniams, ji pateikė tokius uždavinius: 1) Viena dinozaurų rūšis gyveno prieš 250 mln. metų, o kita - prieš 146 mln. metų. Koks metų skirtumas skyrė šias dinozaurų rūšis? 2) Pasaulyje auga daugiau nei 350 000 rūšių augalų, o vabzdžių ir voragyvių rūšių Žemėje yra daugiau kaip 1 mln. Kiek ... ? 3) Mėnulis yra nutolęs 384 000 km nuo žemės. Kiek 384 000 km mažiau už 1 mln. km?

Individualaus mokymosi ir kolektyvinio mokymo derinimo principas gana ryškus visose stebėtose pamokose. Kelių mokytojų pamokose buvo taikoma grupinio mokymo – vienos iš didaktinio diferencijavimo atmainų – metodika. Ryškiausiai ir nuosekliausiai ši metodika buvo taikoma rokiškėnės G. Narkūnaitės pamokoje. Čia mokiniai po 4 susodinti prie stalų ir visą pamoką dirbo grupėse. Panašiai dirbo ir vilnietė J. Stanelienė. Grupinio darbo metodika sėkmingai taikyta ir kitos rokiškėnės I. Šutienės bei anykštėnių D. Guobužienės, E. Bražiūnienės, J. Karosienės, mosėdiškės D. Būtienės, S. Ratautienės (Anykščių J. Biliūno gimnazija, mokytoja metodininkė) pamokose. Darbą poromis savo pamokoje sumaniai panaudojo anykštėnė A. Grinienė. Greičiau atlikusiems pagrindines savarankiško darbo užduotis papildomų užduočių buvo parengusios ir pamokose jas panaudojo Rokiškio „Romuvos“ gimnazijos vyresnioji mokytoja S. Galvelienė, anykštėnė J. Karosienė.

Beveik visose stebėtose pamokose vyravo du mokymo metodai: euristinis pokalbis ir savarankiškas mokinių darbas. Labai daug savarankiškai pamokose dirbo vilniečių S. Urbonienės, J. Stanelienės, J. Montvidienės ketvirtokai, G. Liutkevičienės antrokai, anykštėnės A. Grinienės ketvirtokai, rokiškėnės S. Galvelienės trečiokai, kavarskietės N. Kvieskienės antrokai ir net anykštėnės D. Guobužienės pirmokai. Anykštėnė S. Ratautienė I klasėje labai gražiai sukūrė problemines situacijas: išmatavus nosinę ir virvutę, klausiama, ar tilptų dvi padžiautos nosinės ant virvutės, žaidžiant „Žaislų parduotuvę“, nustatoma, kiek ir kokių žaislų galima nupirkti už tam tikrą pinigų sumą. Probleminius klausimus ir situacijas sumaniai formulavo vilnietės J. Montvidienė, J. Stanelienė. Pamokose buvo ir programuoto mokymo elementų. Anykštėnė J. Karosienė II klasėje mintinio skaičiavimo metu panaudojo plakatą su supainiotomis keičiamomis juostelėmis, kurias sutvarkę mokiniai pakartojo veiksmų komponentų ir rezultatų pavadinimus:

I dauginamasis	**I dėmuo**	**Turinys**	**Sudėtis**
II dauginamasis	**II dėmuo**	**Atėminys**	**Atimtis**
Suma	**Skirtumas**	**Sandauga**	**Daugyba**
....	**........**	**........**	**........**

Į tuščias vietas I–III stulpeliuose mokiniai įdėjo juosteles su veiksmų pavyzdžiais: 2 × 3 = 6, 2 + 3 = 5, 5 – 3 = 2, o į IV stulpelį įdėjo trūkstamą veiksmo pavadinimą „Dalyba“.

Rokiškėnė I. Šutienė skaitė tekstą, o mokiniai įvertino skaitomų sakinių teisingumą, neteisingus sakinius ištaisė: „Saulė pateka vakare. Vakaras – dienos pabaiga. Vakare pusryčiaujame. Vakare sutemsta. Naktį žmonės miega. Ryte leidžiasi Saulė. Vidurnaktį prasideda kita para“.

Atsakymams signalizuoti „šviesoforus“, „signalinius skritulius“ naudojo rokiškietė G. Narkūnaitė, anykštėnė mokytoja metodininkė Ž. Būtėnienė (A. Vienuolio gimnazija). Parenkamuosius atsakymus frontaliojo darbo užduotyse sumaniai panaudojo anykštėnės A. Grinienė, D. Verbickienė, kavarskietė N. Kvieskienė.

Logikoje labai svarbi pirmoji mąstymo forma – sąvoka. Tad ir pradinių klasių matematikos pamokose svarbu tinkamai formuoti sąvokas: bendrąsias gyvenimiškąsias ir matematines. Bendrosios gyvenimiškosios sąvokos matematikos pamokose dažniausiai formuojamos sprendžiant tekstinius uždavinius. Rokiškėnė R. Rumšienė, pasinaudodama plakatėliu, su mokiniais sudarė uždavinį: „Šv. Kalėdų ir Naujųjų metų proga *šeimos nariai* parašė tiek sveikinimų, kiek nurodyta plakate. 1) Kiek sveikinimų parašė *šeimos moterys*? 2) ... *šeimos vyrai*? 3) ... *vaikai*? 4) ... *tėvai*? 5) ... *visi šeimos nariai*?“ Šiame uždavinyje vaikai panaudojo net 5 bendresnes sąvokas. Rokiškėnė R. Repšienė matematinei – statistinei „diagramos“ sąvokai panaudojo klasės mokinių gimimo duomenis (žiemą, pavasarį, vasarą, rudenį): su jais sudarė stulpelinę diagramą ir taip įvedė šią sąvoką.

Pamokose mokytojos naudojo nemaža uždavinių – pokštų: 1) Ėjo du berniukai ir rado pamestus 20 ct. Kiek centų ras 3 berniukai? 2) 1 kg mėsos virė 1 h. Kiek valandų virs ½ kg mėsos? 3) 2 arkliai traukė vežimą. Po kiek kilometrų nubėgo kiekvienas arklys, jei visas nuvažiuotas kelias lygus 20 km? 5) Tėvas vyresnis už sūnų 23 metais. Kada jis bus vyresnis už sūnų 25 metais? (S. Galvelienė) 6) 7 broliai pasisakė turintys po 1 seserį. Kiek vaikų yra šeimoje? (R. Rumšienė) 7) Kada metai turi tiek dienų, kiek žmogus – akių? (G. Liutkevičienė). Anykštėnė A. Grinienė, pateikusi vaikams užduotį: „Kada šuniukas sveria daugiau: kai guli susirietęs ant svarstyklių, ar kai stovi ant žemės?“, paskatino panašias užduotis pateikti ir savo mokinius: 1) Kas sunkesnis: 1 kg pūkų ar 1 kg vinių? 2) Jei ant šakos tupėjo 5 varnos, tai kiek jų liktų, medžiotojui 1 nušovus? Mosėdiškė D. Būtienė pateikė vaikams tokį uždavinuką: „2 septyngalviai slibinai, galvas papuošę skrybėlėmis, ėjo per miestą. Vėjas nupūtė 9 skrybėles. Kiek skrybėlių liko?“ Vilnietė G. Liutkevičienė pateikė antrokams dvi įdomias mįsles: 1) 100 akių galva turi, visos jos į saulę žiūri (saulėgrąža). 2) 2 galvos, 2 rankos, 6 kojos ir 1 uodega. Kas tai? (ant arklio sėdi žmogus). Vilnietė J. Montvidienė prieš aiškindamasi temą „Milijonas“ leido vaikams pafantazuoti – ant lapelių kiekvienas turėjo parašyti, kokias mintis jam sukelia šis žodis. Atsakymai buvo įvairūs: „Tai labai daug pinigų, daiktų, žmonių, augalų ir t. t.“, „Tai gali būti vandens lašų kiekis vandens telkinyje, smiltelių skaičius kibire smėlio“ ir pan. Beje, autoriui buvo labai malonu stebėti pastarosios mokytojos pamoką: prieš nepilnus metus ji autoriaus vadovaujama Vilniaus kolegijos Pedagogikos fakultete, jau įgijusi aukštesnįjį ir aukštąjį ikimokyklinio ugdymo specialybės išsilavinimą, turėdama nemažą darbo stažą pradinėse klasėse, apgynė diplominį darbą apie aktyvaus mokymo metodų panaudojimą mokant matematikos pradinėse klasėse. Pamokoje ši mokytoja panaudojo autoriaus rekomenduotą per paskaitas uždavinį apie supažindinimą su milijonu bei vaizdines priemones. Kadangi autorius pradinių klasių mokytojų matematikos pamokas stebėjo, kaip jau minėta, po daugiau kaip 20 metų pertraukos, pamokose, palyginus su anksčiau stebėtomis, konstatuota daug teigiamų pokyčių: 1) daug įvairesnės, įdomesnės vaikams tapo pamokose naudojamos vaizdinės mokymo priemonės (naudojamos įvairesnės, gražesnės medžiagos, kompiuteriais ir dauginimo technika parengiama daug įvairių dalijamųjų užduočių ir t. t.); 2) originalūs lietuviški vadovėliai padeda tvirčiau integruoti mokymą į realų gyvenimą, susieti su įvairiais mokomaisiais dalykais, mokytojos ir pačios ieško įvairiausių integracijos galimybių; 3) anksčiau beveik neteko stebėti grupinio darbo formos pamokose, dabar naudota gana plačiai; 4) visa tai, kas suminėta 1 – 3 punktuose, skatina geranorišką mokinių ir mokytojų bendradarbiavimą pamokose; 5) mokytojos labiau pasitiki savimi, moka ginti savo nuomonę, yra kur kas kūrybiškesnės.

3. PRADINIŲ KLASIŲ MOKYTOJŲ APKLAUSOS REZULTATŲ APŽVALGA

Remdamasis tik ką stebėtų pamokų pavyzdžiais, autorius didesnėse mokyklose ar viso rajono mastu (Anykščiuose, Rokiškyje) aptarinėjo loginio mąstymo ugdymo problemas mokant matematikos pradinėse klasėse su nemažu skaičiumi pradinių klasių mokytojų, ir, pasinaudodamas tuo, naudojo anketas. Į anketų klausimus atsakė 70 mokytojų. Atsakymai pasiskirstė tokiu būdu. Į klausimą apie turimą išsilavinimą mokytojos nurodė, kad: a) 3 (4,3 %) neturi pradinio ugdymo pedagogikos ir metodikos (toliau – PUPM) specialybės: 1 yra biologijos, 2 – rusų kalbos ir literatūros (toliau – RKL) mokytojos (visos turi aukštąjį atitinkamos specialybės išsilavinimą); b) 2 (2,9 %) mokytojos turi aukštesnįjį PUPM išsilavinimą, 1 iš jų studijuoja neakivaizdiniu būdu ŠU; c) 7 (10,0 %) mokytojos po vidurinės mokyklos baigimo PUPM specialybę įgijo studijuodamos neakivaizdiniu būdu: 6 – ŠU, 1 – Vilniaus pedagoginiame universitete (toliau – VPU); d) studijuodamos dieniniame skyriuje po vidurinės mokyklos šią specialybę įgijo 22 (31,4 %) mokytojos, iš jų 20 – ŠU (1 – kartu įgijo ir dailės mokytojos specialybę), po 1 – VPU ir Klaipėdos universitete (toliau – KU); e) 4 (5,7 %) mokytojos PUPM specialybę ŠU neakivaizdiniu būdu įgijo prieš tai aukštesniosios pedagoginės mokyklos dieniniame skyriuje baigusios ikimokyklinio auklėjimo (toliau – IA) specialybę: Vilniuje – 3, Panevėžyje – 1; f) 4 (5,7 %) mokytojos tokiu pat būdu įgijo PUPM specialybę, prieš tai Panevėžyje įgijusios aukštesnįjį muzikos (3) ir kūno kultūros (1) vadovių išsilavinimą; g) 1 (1,4 %) mokytoja dieninėse studijose įgijo PUPM specialybės aukštesniojo mokslo diplomą Vilniuje, o po to neakivaizdiniu būdu VPU įgijo RKL mokytojos specialybę; h) aukštesnįjį PUPM išsilavinimą (dieniniame skyriuje) Marijampolėje įgijo 4, Klaipėdoje – 2, Ukmergėje – 1, Vilniuje – 4 mokytojos, o po to visos 11 (15,8 %) neakivaizdiniu būdu įgijo PUPM specialybės aukštąjį išsilavinimą (VPU – 3, ŠU – 8); j) du aukštojo mokslo diplomus turi 7 (10,0 %) mokytojos: prieš tai jos įgijo: IA specialybę Klaipėdoje (5), RKL – Vilniuje (2), PUPM specialybės diplomą jos visos įgijo neakivaizdiniu būdu (ŠU – 1, KU ir VPU – po 3); k) 1 (1,4 %) mokytoja, turinti 2 aukštojo mokslo diplomus, PUPM specialybės diplomą įgijo ŠU dieninėse studijose, o anglų kalbos mokytojos diplomą – KU (neak. būdu); l) 6 (8,6 %) mokytojos turi po 3 diplomus: IA aukštesniojo išsilavinimo diplomus dieninėse studijose visos jos įgijo atitinkamai: Vilniuje – 3, Klaipėdoje – 1, Marijampolėje – 1, IA aukštąjį išsilavinimą jos įgijo: Klaipėdoje (1 – dieniniame skyriuje ir 3 – neakivaizdiniu būdu) ir Vilniuje – 2 (neakivaizdiniu būdu), aukštąjį PUPM specialybės išsilavinimą jos įgijo neakivaizdiniu būdu: ŠU ir KU – po 2, Vilniaus kolegijoje – 2 (aukštasis neuniversitetinis išsilavinimas); m) 1 (1,4 %) mokytoja ŠU neakivaizdiniu būdu įgijo edukologijos magistrės diplomą, prieš tai dieninėse studijose ten pat – PUPM specialybės diplomą; n) 1 (1,4 %) mokytoja KU neakivaizdiniu būdu įgijo švietimo vadybos magistrės diplomą, o prieš tai ji buvo baigusi Panevėžio konservatoriją (dieninės studijos) ir įgijusi PUPM specialybę su papildoma dailės specializacija, po to dar baigė ir ŠU, įgydama PUPM specialybę. Taigi nors ir nedidelė imtis, bet ji iš esmės reprezentatyviai atspindi bendrąją pradinių mokyklų išsilavinimo būklę Lietuvoje. Daugiau kaip 90 % mokytojų turi aukštąjį PUPM specialybės išsilavinimą, aukštojo išsilavinimo neturi vos 2 (2,9 %) mokytojos, iš jų 1 jo siekia. Daugiausia – 42 mokytojos PUPM specialybę įgijo ŠU, antroje vietoje yra VPU (8 mokytojos), trečioje – KU (6 mokytojos) ir ketvirtoje – Vilniaus kolegija (2 mokytojos). Taigi ir čia stebimas gana ryškus imties reprezentatyvumas.

Pagal darbovietę apklaustosios pradinių klasių mokytojos pasiskirstė taip (17 lentelė):

17 lentelė

Pradinių klasių mokytojų pasiskirstymas pagal darbovietę
(abs. skaičiais ir procentais)

Gimnazija	Vidurinė mokykla	Pagrindinė mokykla	Pradinė mokykla	Pradinė mokykla-darželis
25 (35,7 %)	16 (22,9 %)	15 (21,4 %)	10 (14,3 %)	4 (5,7 %)

Taigi aktyviausios, labiausiai besidominčios didaktinėmis idėjomis pasirodė esą gimnazijų pradinių klasių mokytojos. Beje, ir gimnazijų dabar yra daug. Mažai yra likę pradinių mokyklų, nedaug ir pradinių mokyklų-darželių.

Pagal tai, kokio tipo gyvenvietėje yra darbovietė, apklaustosios pradinių klasių mokytojos pasiskirstė taip (18 lentelė):

18 lentelė

Pradinių klasių mokytojų pasiskirstymas pagal gyvenvietės, kurioje yra darbovietė, tipą
(abs. skaičiais ir procentais)

Miestas	Miestelis	Kaimas
35 (50,0 %)	23 (32,9 %)	12 (17,1 %)

56 (80%) pradinių klasių mokytojų gyvena toje pačioje gyvenvietėje, kur ir dirba, o 14 (20 %) į darbą važinėja iš kitų gyvenviečių. Iš jų gyvena nuo darbo vietos: iki 5 km atstumu – 8 mokytojos, 6–10 km – 3, 11–20 km – 1, 21–30 km – 3, daugiau kaip 30 km (iš tiesų – 71 km) – 1.

Pagal kelionės į darbą pobūdį apklaustosios pradinių klasių mokytojos pasiskirstė taip (19 lentelė):

19 lentelė

Pradinių klasių mokytojų pasiskirstymas pagal kelionės į darbą pobūdį
(abs. skaičiais ir procentais)

Vaikšto pėsčiomis	Naudojasi visuom. transportu	Važinėja nuosavu automobiliu
35 (50,0 %)	15 (21,4 %)	20 (29,6 %)

Pagal pedagoginio darbo stažą apklaustosios pradinių klasių mokytojos pasiskirstė taip (20 lentelė):

20 lentelė

Pradinių klasių mokytojų pasiskirstymas pagal pedagoginio darbo stažą
(abs. skaičiais ir procentais)

0–5 m.	6–10 m.	11–20 m.	21–30 m.	31 ir daugiau m.
1 (1,4 %)	8 (11,4 %)	28 (40,0 %)	29 (41,4 %)	4 (5,8 %)

Šios nedidelės imties pasiskirstymas irgi gana reprezentatyvus: jaunos mokytojos – nedažnas reiškinys mokyklose, taip pat ir kvalifikacijos kėlimo renginiuose. Iš į I–III lentelės stulpelius pakliuvusių respondenčių po 1 turėjo kiek didesnį bendrąjį darbo stažą, o iš IV stulpelio tai nurodė 7 respondentės.

Paskaitoje girdėtas mintis apklaustosios pradinių klasių mokytojos įvertino taip (21 lentelė):

21 lentelė

Pradinių klasių mokytojų pasiskirstymas pagal tai, kaip jos įvertino paskaitoje girdėtas mintis apie loginio mąstymo ugdymą mokant matematikos
(abs. skaičiais ir procentais)

Mintys mažai girdėtos	Mintys girdėtos	Mintys gerai žinomos
16 (22,9 %)	43 (61,4 %)	11 (15,7 %)

Iš 55 mokytojų, pasirinkusių aukščiau minėto klausimo II ar III atsakymus, 14 atsakė, kad susipažino su paskaitoje nagrinėtomis problemomis besimokydamos ŠU, 7 – KU, 5 –VPU, 24 – kvalifikacijos kėlimo renginiuose, 5 – savišvietos būdu .

Savišvietai mokytojos žinių randa: „Žvirblių tako“ žurnale – 67 (95,7 % – tai puikus šio žurnalo įvertinimas), „Dialogo“ laikraštyje – 23 (32,9 %), „Švietimo naujienų“ leidinyje – 4 (5,7 %), kitoje literatūroje – 26 (37,1 %), internete – 11 (15,7 %), mokslinių-metodinių konferencijų medžiagoje – 1 (1,4 %). Tai, kad beveik visos apklaustosios mokytojos nurodė „Žvirblių tako“ žurnalą – nieko nuostabaus. Tai iš tiesų yra vienintelis periodinis leidinys, jau daug metų kas du mėnesiai aplankantis savo skaitytojus ir skirtas būtent pradinių klasių mokytojoms. Jis rašo bendraisiais pedagoginiais ir atskirų mokomųjų dalykų mokymo pradinėje mokykloje klausimais. Vien loginio mąstymo ugdymo mokant matematikos tema mus dominančiu 1998–2005 m. laikotarpiu šis žurnalas paskelbė 35 mokslininkų ir mokytojų praktikų straipsnius (22 lentelė):

22 lentelė

„Žvirblių tako“ straipsnių apie loginio mąstymo ugdymą mokant matematikos, paskelbtų 1998–2005 m., skaičius

Metai	Straipsnių skaičius
1998	5 [47, 54, 67, 87, 104]
1999	5 [63, 6, 86, 92, 110]
2000	5 [1, 64, 81, 29, 105]
2001	2 [84, 107]
2002	6 [59, 74, 75, 82, 83, 85]
2003	3 [62, 68, 70]
2004	7 [24, 61, 66, 96–98, 106]
2005	2 [56, 57]

„Dialogo“ laikraštį apklaustosios mokytojos, matyt, nurodė iš inercijos, nes, pvz., apie loginio mąstymo ugdymą mokant matematikos mokymo procese aptariamuoju laikotarpiu jame tik 2005 m. pasirodė vienas straipsnis [108]. Matyt, čia turėjo įtakos analogija su šio laikraščio pirmtakais „Tėvynės šviesa“ ar net „Tarybiniu mokytoju“, kuriuose buvo spausdinama daug straipsnių pradinės matematikos didaktikos klausimais [13]. Nedaug tokių straipsnių ir „Švietimo naujienose“. Gaila, kad tik viena mokytoja yra skaičiusi mokslinių-metodinių konferencijų medžiagos leidinius. Nei viena mokytoja nepaminėjo mokslinių recenzuojamų žurnalų: jie paprasčiausiai mokyklų nepasiekia ir mokytojams nėra žinomi, galbūt išskyrus kai kurias internetu besinaudojančias mokytojas. Taigi mokslas – sau, praktika – sau...

4. DIDAKTINĖ MATEMATIKOS MOKYMO LIETUVOS MOKYKLŲ PRADINĖSE KLASĖSE BAZĖ

Labai svarbus mokytojų ir mokinių sėkmingo darbo garantas – vadovėliai, su jais susieti pratybų sąsiuviniai, knygos mokytojams bei kitos vadovėlių autorių pateikiamos priemonės. Pradinėse klasėse didelę reikšmę turi vadovėlių ir pratybų sąsiuvinių – priemonių, kuriomis tiesiogiai naudojasi mokiniai, iliustracijos (lot. „*illustratio*“ – vaizdus aiškinimas, vaizdavimas): piešiniai, schemos ir brėžiniai, papildantys ir puošiantys tekstą. Dabar Lietuvoje turime trijų autorių kolektyvų mokytojams siūlomus vadovėlius ir pratybų sąsiuvinius. Vadovėliuose ir pratybų sąsiuviniuose esančios iliustracijos – svarbi vaizdumo atmaina, padedanti geriau suvokti abstrakčią matematinę medžiagą. Tai sutartinė kalba, kurios mokiniai, pradėję mokytis pirmoje klasėje dar gerai nesuvokia, todėl turi būti mokomi jas suvokti. Supratę iliustracijų turinį ir prasmę, mokiniai lengviau supranta mokomąją medžiagą, užduotis, mokomi pereiti nuo konkretaus prie abstraktaus, patys rengiasi kurti įvairias schemas, lenteles, kurių prireiks vėliau, kai reikės atlikti sunkesnes užduotis tiek mokykloje, tiek gyvenime.

Antai iliustracijose, kurios yra dviejuose dabartiniuose I klasės vadovėliuose [27, 29], stengiamasi atspindėti artimiausią vaiko aplinką, t. y. matematikos mokymo integracija su realiu gyvenimu yra ryškus ir svarbus abiejų vadovėlių bruožas. Kadangi mokymosi sėkmė ar nesėkmė I klasėje iš dalies nulemia tolesnį vaiko mokymąsi ir net visą jo gyvenimą, mokytojui būtina gerai suvokti vadovėlių teikiamas galimybes mokymosi sėkmei garantuoti. Jau vien iš iliustracijų įvairovės galima įsivaizduoti vadovėlių ir pratybų sąsiuvinių autorių siūlomas strategines kryptis mokant mokinius matematikos. Jau pirmoje klasėje prof. B. Balčyčio ir jo bendradarbių siūlomoje metodikoje einama nuo konkretaus prie abstraktaus, sudaromi tvirti skaičiavimo, operacijų su skaičiais įgūdžiai. Arkadijaus ir Danutės Kiseliovų metodikoje siekiama ugdyti loginį ir erdvinį mąstymą, padedama lengviau orientuotis konkrečioje aplinkoje, įvairiose situacijose įgytas žinias taikyti praktiškai. Gyvenimiškos užduotys padeda ne tik suprasti matematikos reikšmę, bet skatina ir jos mokytis. Vaikams imponuoja spalvingumas, ryškumas. Ypač tai svarbu pirmoje klasėje, nes pirmokai dar labai maži, dar neišėję iš žaidimų pasaulio, negeba ilgesniam laikui sukoncentruoti dėmesio, ne itin pastabūs. Todėl kiekviena iliustracija, paaiškinanti, padedanti suvokti užduoties sąlygą, yra reikalinga. Labai džiugu, kad visose trijose metodikose iliustracijos spalvotos – greičiau atkreipiamas dėmesys, vaikams įdomiau, žaismingiau. Tai didelis, ypač reikšmingas dabartinio poligrafijos lygio galimybių pritaikymas mokyklai. Priminsime, kad pirmas spalvotas matematikos vadovėlis pirmokams Lietuvoje buvo pateiktas tik 1965 m. [13]. Dabar jais gali džiaugtis visi pradinukai ir jų mokytojai.

Prof. B. Balčyčio bei L. Hofšteterienės ir D. Šalnienės vadovėlių ir pratybų sąsiuviniuose tekstiniai uždaviniai pateikiami maždaug tradiciškai. I klasėje I pusmetyje, kol vaikai dar nemoka gerai skaityti, mokytojas su jais skatinamas sudarinėti uždavinius pagal paveikslėlius, vaizdines priemones, naudojantis klasėje esančiais daiktais, inscenizacijomis. Vėliau pereinama prie uždavinių, pateiktų tradicine sąlygos ir klausimo forma; kur reikia, tokie uždaviniai yra iliustruoti paveikslėliais, o III–IV klasėse – ir schemomis. Yra nemažai uždavinių, kai patys mokiniai turi sugalvoti klausimą.

Antrojoje originaliojoje lietuviškoje pradinės matematikos mokymo sistemoje – A. ir D. Kiseliovų mokomosiose knygelėse labai dažnai uždavinio sąlyga pateikiama piešinio ir teksto kombinacija, lentele, diagrama, labai daug teminių puslapių (pvz., „Šiek tiek apie paukščius“ ir kt.). Tai sudaro galimybes mokiniams patiems formuluoti uždavinio sąlygą, glaudžiau integruoti mokymą su gyvenimu, su vaiko aplinka, taip pat mažesniame knygos plote pateikti daug daugiau uždavinių, negu jų būdavo pateikiama tradiciniuose vadovėliuose. Visos trys metodinės sistemos yra ne konfrontuojančios, bet papildančios viena kitą. Mokytojas, pasirinkęs vieną iš jų, neturėtų užmiršti ir kitų, jų teigiamybėmis papildyti pasirinktąją, taip eliminuodamas jos silpnesnes puses.

B. Balčytis su bendraautorėmis parengė ir papildomų užduočių rinkinius stipresniems pradinių klasių mokiniams [21, 22, 30, 21]. Tai mokytojams padeda diferencijuoti ir individualizuoti darbą su mokiniais.

Įdomūs yra kompiuterių panaudojimo mokantis pradinės matematikos bandymai, apie kuriuos informacija pasirodo mokslinių-praktinių konferencijų darbų rinkiniuose, „Žvirblių take" ir kitur [1, 23, 40, 41, 43, 60, 90]. Tokių pamokų stebėti neteko.

Yra ir teorinių bei praktinių darbų, kurie pradinių klasių mokytojui gali padėti giliau suvokti matematikos mokymo problemas: bendrąją pradinės matematikos didaktiką [9], skaičių ir skaičiavimo mokymo(-si) metodiką [42], tekstinių uždavinių sprendimo mokymą [20, 69], matematinių gebėjimų ugdymą [65, 72, 73]. Klaipėdos ir Šiaulių universitetai periodiškai rengia konferencijas pradinio ugdymo klausimais [99–103 ir kt.], kai kuriuose jų pranešimuose analizuojami įvairūs matematikos mokymo pradinėje mokykloje aspektai [41, 43, 71]. Taigi pradinių klasių mokytojas jau turi gana plačias galimybes lavintis savarankiškai, kūrybiškai taikyti įvairias didaktines rekomendacijas.

5. STEBĖTŲ MATEMATIKOS MOKYTOJŲ PAMOKŲ APŽVALGA

Matematikos pamokos vyresniosiose klasėse stebėtos: Anykščių rajone – 13, Rokiškio rajone – 10, Skuodo raj. Mosėdžio gimnazijoje – 1, Vilniaus mieste – 3. Aptarsime jas, laikydamiesi tokio paties plano, kaip ir pradinėse klasėse.

Rokiškio Romuvos gimnazijos mokytojos metodininkės Filomena Gurnikienė ir Jolanta Bernienė, vyr. mokytoja Rita Šarkauskienė, Juozo Tumo-Vaižganto vidurinės mokyklos mokytoja metodininkė Elvyra Matiukienė, Juozo Tūbelio gimnazijos mokytoja metodininkė Janina Matijošienė ir mokytoja ekspertė Birutė Sirvydienė savo pamokose sumaniai panaudojo įprastą klasės lentą, užrašus ir brėžinius joje. Tą patį galima tvirtinti ir apie Vilniaus A. Vienuolio pagrindinės mokyklos vyr. mokytojos Žiedės Juodeikytės ir mokytojos metodininkės Genovaitės Davenienės pamokas. Vilniaus šv. Kristoforo vidurinės mokyklos vyr. mokytoja Vilma Groblienė braižymui klasės lentoje daug naudojo braižomąjį trikampį. Rokiškio J. Tumo-Vaižganto vidurinės mokyklos mokytoja metodininkė Laima Karkaitė visas penkias kampų rūšis: smailųjį, statųjį, bukąjį, ištiestinį ir pilnąjį pademonstravo naudodamasi skriestuvu. Kampus brėžė ir matavo matlankiu. Sprendžiant uždavinį apie laikrodžio rodyklių sudaromus kampus naudojo tikrą sieninį laikrodį. Rokiškėnė J. Bernienė pademonstravo, kaip, neturint skriestuvo, apskritimą galima nubrėžti naudojantis virvute, lentai valyti skirtu skuduru (ta pačia proga ji prisiminė savo dėstytoją dab. VPU prof. habil. dr. Vaclovą Blizniką (1930–1997), kuris tą darė savo paskaitose). Didaktinę dalijamąją medžiagą su savarankiško darbo užduotimis savo pamokose naudojo Rokiškio raj. Obelių vidurinės mokyklos mokytoja metodininkė Aldona Vasiliauskienė, rokiškėnės F. Gurnikienė, B. Sirvydienė. Ji padalijo kiekvienam mokiniui 2000-jų metų matematikos valstybinio egzamino vieno užduočių varianto kopiją ir su jais dirbo dvi pamokas. Beje, B. Sirvydienės mokiniai mokosi iš vadovėlio, kurio viena iš autorių yra jų mokytoja: *Šileikienė R. D., Dabrišienė V., Jatkonienė D., Sirvydienė V. B., Šulčienė J., Navickienė A. Matematika. Išplėstinis kursas. Vadovėlis XI klasei. Kn. I–II. Kaunas, 2004*, o taip pat gali naudotis jos pačios išleista mokomąja knygele: *Sirvydienė V. B. Modulio uždaviniai. Kaunas, 2004*. Naudota didaktinė dalijamoji medžiaga ir Anykščių rajono mokyklose. Su abiturientais kartodama trigonometrines funkcijas, savo parengtas užduotis savarankiškam darbui naudojo Anykščių Jono Biliūno gimnazijos mokytoja metodininkė Aldona Kuzmienė. Anykščių A. Baranausko vidurinės mokyklos vyresnioji mokytoja Regina Kalinkienė vienuoliktokams išdalijo valstybinio brandos egzamino formulių lapo kopijas. Formules mokiniai naudojo atlikdami savarankišką užduotį. Tos pačios mokyklos vyresnioji mokytoja Valda Žemaitytė dešimtos klasės mokiniams, su kuriais pamokoje kartojo lygčių sprendimo metodus, išdalijo mokiniams V. Sičiūnienės ir M. Stričkienės „Pasirengimo baigiamiesiems egzaminams medžiagos“ (Vilnius, 2000) 33–34 puslapių – skyrelio „Lygtys“ kopijas. Taip mokiniams buvo duota reikalingos teorinės medžiagos santrauka ir 18 užduočių. Dalis jų buvo išspręsta klasėje, dalis skirta išspręsti namie, dalis liko kitoms pamokoms. Anykščių rajono Troškūnų Kazio Inčiūros vidurinės mokyklos mokytoja metodininkė Virginija Paliulionienė su XI klasės mokiniais apibendrindama jų žinias apie laipsninę funkciją savarankiškam individualizuotam darbui išdalijo tokio pavidalo užduotis:

$\boldsymbol{f(x) = x^{-5}}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^{-5}$							

Tame pačiame lape buvo koordinačių ašys ir tinklas nubraižyti atitinkamos funkcijos grafikui. (Mokiniai buvo gavę skirtingus lapus: pateiktasis yra su nelyginiu neigiamuoju rodikliu; buvo ir su lyginiais teigiamaisiais bei neigiamaisiais, nelyginiais teigiamaisiais rodikliais). Vilniaus A. Vienuolio pagrindinės mokyklos mokytoja metodininkė G. Davenienė penktokams išdalijo pagal mokytojo novatoriaus V. Šatalovo metodiką parengtus atraminius konspektus ir su jai dirbo visą pamoką, kuri buvo skirta veiksmų su natūraliaisiais skaičiais apibendrinimui. Manytina, kad šis konspektas, parengtas patyrusios mokytojos, bus įdomus skaitytojui, tad čia jį pateikiame:

1. Turime natūraliųjų skaičių seką: 1, 2, 3, ..., 97, 98, 99. Kokių skaičių, lyginių ar nelyginių, joje daugiau?
2. Apskaičiuokite sumą: 1 + 3 + 5 + ... + 97 + 99.
3. Raskite mažiausią triženklį skaičių, kuris dalytųsi iš 3, o jo pirmasis skaitmuo būtų 7.
4. Raskite didžiausią penkiaženklį skaičių, kuris dalytųsi iš 9, o jo pirmasis skaitmuo būtų 3 (skaitmenys gali kartotis).
5. Dviejų gretimų natūraliųjų skaičių suma lygi 75. Nustatykite tuos skaičius.
6. Dviejų gretimų lyginių skaičių suma lygi 150. Nustatykite tuos skaičius.
7. Liudas sugalvojo skaičių ir padalijo iš 5. Iš dalmens atėmė 35 ir gavo mažiausią triženklį skaičių. Kokį skaičių sugalvojo Liudas?
8. Kuris iš skliaustuose esančių skaičių atitinka nurodytus reikalavimus?
   a) Triženklis, nelyginis, dalijasi iš penkių, o jo skaitmenų suma lygi 6. (115, 105, 510).
   b) Yra tarp skaičių 1000 ir 10 000, sudarytas iš vienodų skaitmenų, kurių suma lygi 4. (2002, 1111, 2222).
   c) Nelyginis, didesnis už 500, bet mažesnis už 1000, jo skaitmenų suma lygi 8, o paskutiniai du skaitmenys vienodi (521, 800, 611).
9. Kuris atsakymas teisingas?
   - 24 × 3 – 14 × 3. (30, 20, 10).
   - 34 × 2 + 66 × 2. (250, 200, 150).
   - (100 – 5) × 20. (2000, 2100, 1900).
10. Jei Julija pirktų 7 pieštukus, tai jai liktų 10 ct, o jei pirktų 8 pieštukus, tai jai trūktų 10 ct. Kiek pinigų turi Julija?
11. 4 persikai, 2 kriaušės ir 1 obuolys kartu sveria 550 g, o 1 persikas, 3 kriaušės ir 4 obuoliai sveria 450 g. Kiek sveria 1 persikas, 1 kriaušė ir 1 obuolys kartu? (Visi obuoliai – vienodi, visos kriaušės – vienodos, visi persikai – vienodi).
12. Automobilis važiavo 4 valandas tam tikru greičiu. Jeigu jis nuvažiuotų dar 16 km, tai iš viso nuvažiuotas kelias būtų 176 km. Kokiu greičiu važiavo automobilis?
13. Du automobiliai pradėjo važiuoti vienas priešais kitą tuo pačiu laiku. Atstumas tarp jų prieš pradedant važiuoti buvo 200 km. Automobilių greičiai 60 km/h ir 80 km/h. Koks atstumas bus tarp jų po 1 h?
14. 12 valandą garlaivis išplaukė iš prieplaukos 20 km/h greičiu. 16 valandą iš tos pačios prieplaukos išplaukė antrasis garlaivis ir pasivijo pirmąjį garlaivį 24 valandą. Koks antrojo garlaivio greitis?
15. Iš dviejų vietovių, tarp kurių yra 400 km atstumas, tuo pačiu laiku priešais vienas kitą išvažiavo du automobiliai ir po 4 valandų susitiko. Apskaičiuokite kiekvieno automobilio greitį, jei vienas automobilis važiavo 12 km/h greičiau už kitą.

13 ir 15 šio konspekto užduotis vaikai turės atlikti namuose, visas kitas užduotis atliko klasėje, visą pamoką vyko euristinis pokalbis.

Anykščių J. Biliūno gimnazijos vyresnioji mokytoja Birutė Navikienė, VI klasės mokiniams aiškindama temą „Skritulio plotas“, panaudojo pusiau perkirpto ir į smulkias išpjovas sukarpyto skritulio modelį (buvo sukarpyta į 24 dalis), iš jų sudėjo figūrą, kurios plotas – artimas stačiakampio plotui: $S = ah = \pi r \times r = \pi r^2$. Kaip dalijamąją medžiagą savarankiškam darbui ji panaudojo skritulius su įvairaus ilgio spinduliais. Mokiniai turėjo išsimatuoti skritulių spindulius ir apskaičiuoti plotus. Beje, kaip papildomą darbą besidomintiems matematika mokiniams siūlomas, pvz., plakatas:

Mokyklos istorija

1. Mūsų mokykla pradėjo darbą .... m. Metus sužinosite, jei išspręsite šį uždavinį (mokiniams pateiktas uždavinys, kurio atsakymas – 1920).
2. Pirmasis mokyklos direktorius buvo J. .... Jo pavardę sužinosite, atlikę šią užduotį (mokiniams pateikiama užduotis, kurios atskiri pratimai užšifravę raides: G, U, Ž, Y, S).
3. <...>.

Tokių užduočių plakate iš viso yra 20. Visas atlikę mokiniai sužino svarbiausius savo mokyklos istorijos klausimus. O tai jau matematikos integracija su istorija.

Tos pačios gimnazijos mokytoja metodininkė Jūratė Vanagienė, IX klasėje aiškindama temą „Taisyklingieji daugiakampiai“, panaudojo taisyklingojo šešiakampio, lygiakraščio trikampio, kvadrato modelius, taip pat – priešpriešinių pavyzdžių modelius: rombo, stačiojo lygiašonio trikampio, kuriuos, deja, kartais net studentai laiko taisyklingaisiais daugiakampiais. Beje, iš esmės teigiamai atsiliepdama apie vadovėlį: *Bagdonienė I., Knyvienė J., Kuzmarskienė A., Plikusas A., Pulmonas K., Šinkūnas J. Matematika 9. D. I–II. Vilnius, 2000*, mokytoja nurodė ir vieną jo trūkumą: trikampio pusiaukampinių susikirtimo taško savybė pateikiama kaip nelabai privalomo uždavinio sprendimo rezultatas, o paskui šia savybe naudojamasi, kalbant apie taisyklingųjų daugiakampių savybes.

Anykščių A. Vienuolio gimnazijos mokytojas metodininkas Valentinas Šaltenis, aiškindamas tikimybių savybes XII klasės mokiniams, rėmėsi jų patirtimi: lošimo kauliuko metimu, rutuliukų išėmimu iš dėžės.

Obelietė A. Vasiliauskienė pamokose pasinaudojo kompiuterinės technikos galimybėmis. IX klasėje ji, aiškindama trikampių panašumą, ekrane demonstravo savo aiškinamus dalykus, pradedant nuo figūrų panašumo iki trikampių panašumo. Po to, ekrane pateikusi uždavinį: „Duoti du panašūs trikampiai ABC ir MNK. Nustatykite, kurie jų kampai lygūs ir kurios kraštinės proporcingos“ (ekrane demonstruoti ir jų brėžiniai), su mokiniais euristinio pokalbio metu išsprendė šį uždavinį ir jo sprendimas taip pat buvo pademonstruotas ekrane. Po to ekrane pateikė dvi panašiųjų trikampių savybes: apie panašiųjų trikampių perimetrų bei plotų santykį. Euristinio pokalbio metu savybės buvo įrodytos, kiekvieną įrodymo žingsnį projektuojant ekrane. Kitoje pamokoje su septintokais kartojant temą „Kampai“ mokytoja A. Vasiliauskienė ekrane nuosekliai, gavusi atsakymą į ankstesnį klausimą (teisingą atsakymą parodant ekrane), pateikė klausimus teorinei medžiagai pakartoti:

1. Ką vadiname kampu?
2. Ką vadiname kampo pusiaukampine?
3. Kokius kampus vadiname gretutiniais?
4. Kokią savybę turi gretutiniai kampai?
5. Kokius kampus vadiname kryžminiais?
6. Kokią savybę turi kryžminiai kampai?
7. Kokį kampą vadiname centriniu?
8. Kaip apskaičiuojame apskritimo ilgį?
9. Kam lygus skritulio plotas?
10. Kaip apskaičiuoti centrinio kampo α lanko ilgį?

Panašiai pasinaudojant kompiuterine technika buvo sprendžiami ir uždaviniai: euristinio pokalbio metu rasti teisingi atsakymai buvo pademonstruojami ekrane.

Jau minėta troškūnietė mokytoja V. Paliulionienė, pasitelkusi kompiuterinę techniką, su mokiniais aptarė laipsninės funkcijos teorinę medžiagą, apibendrino savarankiško darbo rezultatus, pademonstruodama tikslius įvairius laipsninių funkcijų grafikus.

Anykščių Jono Biliūno gimnazijos mokytoja metodininkė Violeta Alsienė kompiuterio ekrane VIII klasės mokiniams parodė, kaip vaizduojami tiesinių nelygybių sprendiniai skaičių tiesėje, kaip jie užrašomi intervalais, išmokė perskaityti intervalus. Pateikė ir istorinės medžiagos: ženklą ∞ 1655 m. pirmasis pavartojo anglų matematikas Džonas Volis (*Wallis*, 1616–1703), ženklus $<$ ir $>$ 1631 m. įvedė kitas anglų matematikas Tomas Hariotas (*Harriot*, 1560–1621), lygybės ženklą – 1557 m. anglų gydytojas ir matematikas Robertas Rekordas (*Record*, 1510–1568). Įtvirtinimui mokiniams ji pateikė tokį savarankišką darbą:

1. Pavaizduoti grafiškai: $[-2;7]$, $(0;10)$, $(-5;3)$, $(-\infty;1)$; $[4;+\infty)$.
2. Užrašyti intervalais ir pavaizduoti grafiškai: $-3 < x \leq 9$; $x > -12$; $x \leq {}^{3}/_{7}$; $-4 < x < -1$; $x < 10{,}4$.
3. Ar skaičiai -5; -3; 0; 5; 7 priklauso intervalui $[-4;7]$?
4. Nurodyti: a) tris sveikuosius skaičius, priklausančius intervalui $[-2;+\infty]$; b) du sveikuosius skaičius, nepriklausančius intervalui $[-1;4)$; c) mažiausią sveikąjį skaičių, priklausantį intervalui $(3;10)$; d) mažiausią sveikąjį skaičių, priklausantį intervalui $[-8;+\infty]$; e) didžiausiąjį sveikąjį skaičių, priklausantį intervalui $(-\infty;4{,}2)$; f) didžiausiąjį sveikąjį skaičių, priklausantį intervalui $[-15;15]$.

Aptariant atsakymus, 1 – 3 užduočių teisingi atsakymai buvo parodyti ekrane.

Mosėdžio gimnazijos mokytojas metodininkas A. Drakšas ekrane VI klasės mokiniams pateikinėjo trupmenas, kurias jie turėjo suprastinti: $^{5}/_{10}$; $^{66}/_{44}$; $^{16}/_{40}$; $^{28}/_{21}$ ir t. t. Po kiekvienos suprastintos trupmenos, kuriam nors mokiniui teisingai atsakius, ekrane tuoj „iššokdavo" teisingas atsakymas. Pateikė ekrane mokiniams jis ir savarankišką darbą:

1. Parašykite trupmenas $^{1}/_{6}$, $^{3}/_{5}$, $^{7}/_{10}$ su vardikliu 30.
2. Subendravardiklinkite trupmenas: a) $^{9}/_{10}$ ir $^{2}/_{5}$; b) $^{13}/_{20}$ ir $^{19}/_{30}$; c) $^{3}/_{6}$ ir $^{5}/_{12}$; d) $^{4}/_{9}$ ir $^{5}/_{7}$.
3. Paverskite ½ dešimtosiomis.
4. Palyginkite: a) $^{2}/_{7}$ ir $^{4}/_{7}$; b) $^{8}/_{15}$ ir $^{7}/_{10}$; c) $^{20}/_{45}$ ir $^{6}/_{27}$; d) ¾ ir $^{21}/_{28}$.

Savarankiško darbo atlikimo kokybę mokiniai įvertino dirbdami poromis, o po to, aptarus teisingus atsakymus, jie buvo pademonstruoti ekrane.

Pamokoje skaičiuokliais mokiniai skaičiavo Troškūnų K. Inčiūros vidurinėje mokykloje (mokyt. V. Paliulionienė) ir Anykščių J. Biliūno gimnazijoje (vyresnioji mokytoja Dalia Savickienė). Beje, ši mokytoja pamokai XI klasėje, kurios tema buvo „Redukcijos formulės" rengėsi, parinkdama užduotis mokiniams net iš keturių vadovėlių ir uždavinynų: 1) *Algebra. Vadovėlis IX–X klasėms/ Red. S. Teliakovskis. Kaunas, 1994*; 2) *Sičiūnienė V., Balevičienė D., Dobravolskaitė D., Mikalauskienė A., Zimnickienė R. Matematika. Bendrasis kursas. Vadovėlis XII klasei. Kaunas*, *2006*; 3) *Jocaitė A., Mockus V. Mokyklinės matematikos teminio kartojimo uždavinynas*. *11–12 klasei. Šiauliai, 2001*; 4) *Razmas R., Teišerskis J., Vitkus V. Matematikos uždavinynas XI–XII klasei. Kaunas, 1997.*

Pamokose vyravo euristiniai pokalbiai, kur reikia – su mokytojų aiškinimo intarpais, buvo ir nemaža savarankiškų darbų. Anykščių Antano Baranausko vidurinės mokyklos vyresniosios mokytojos R. Kalinkienė ir V. Žemaitytė, mokytoja metodininkė Regina Kacevičienė, Anykščių A. Vienuolio gimnazijos vyresnioji mokytoja Danelė Masiulytė, tos pačios gimnazijos mokytoja metodininkė matematikos magistrė Rasa Kavoliūnaitė ypač gerai valdė klasę pamokos metu, sumaniai derindamos šiuos mokymo metodus. Beje, R. Kavoliūnaitė mokinių akyse turi didžiulį autoritetą: ji dalyvavo eksperimentiškai patikrinant vadovėlį: *Šileikienė R. D. ir kt. Matematika. Išplėstinis kursas. Vadovėlis XI klasei. Kn. I–II. Kaunas, 2004*. Rokiškėnė F. Gurnikienė, prieš įrodant trapecijos vidurinės linijos savybę, mokiniams liepė atlikti nedidelį eksperimentą: sąsiuviniuose nusibrėžti trapecijas bei jų vidurines linijas, visa tai išmatuoti ir lentoje buvo užrašyti kelių mokinių duomenys bei pagal juos suformuluota teorema – trapecijos vidurinės linijos savybė, kuri po to buvo įrodyta. Itin sumaniai probleminius klausimus mokiniams formulavo Troškūnų K. Inčiūros vidurinės mokyklos mokytojas metodininkas Valdas Skliaustys. XII klasėje vesdamas pamoką „Erdvės taško koordinatės", V. Skliaustys paprašė mokinių pažymėti iškabintoje ant kartono lapo nubraižytoje koordinačių plokštumoje taškus: A(3;4), B(0;-3) ir C(-4;2). Po to suformulavo probleminį klausimą: „Kaip nustatyti šalia koordinačių plokštumos esančio (mokytojo rankoje) kreidos gabaliuko koordinates?“ Sutarus, kad tam reikalinga erdvės koordinačių sistema, nubrėžiama trečioji ašis Oz. Paaiškinus, kaip tai padaryti, mokiniai ašis nusibraižė savo sąsiuviniuose. Lentoje pakabintoje koordinačių plokštumoje, tapusioje „erdve“, atidėjo tašką M(2;3;4). Aptarus, kad tai galima atlikti trimis būdais, liepė mokiniams savarankiškai sąsiuviniuose atidėti taškus: A(3;0;2), R(4;-2;1), G(0;0; -4), E(-3;2;-4), N(2;3;0), T(4;0;0). Po to tie patys taškai mokinių buvo atidėti lentoje iškabintoje „erdvėje“. Paskui suklasifikavo taškus: a) taškai, esantys ašyse: G, T; b) taškai, esantys plokštumose: A, N. Po to vėl buvo pateikti mokiniams probleminiai klausimai: „Kaip tai nustatyti, neatidėjus taško? Jei taškas yra ašyje, ar galima sakyti, kad jis yra erdvėje?“ Vėliau mokiniams V. Skliaustys pateikė tokią užduotį: „Duotas stačiakampis gretasienis OBDURATE. Kai kurių jo viršūnių koordinatės yra: O(0;0;0), B(0;0;3), U(4;0;0), R(0;2;0). Rasti viršūnių D, A, T, E koordinates“. Mokiniai užduotį atliko savarankiškai, po to brėžinį atliko lentoje pakabintoje priemonėje. Vėl buvo aptarta, kurie taškai yra ašyse, kurie – plokštumose. Probleminių klausimų mokytojas pateikė, liepdamas pasikartoti plokštumos vektorius. Mokytojo V. Skliausčio mokiniai pamokose ir namuose mokosi iš šių vadovėlių ir uždavinynų: 1) *Intienė K., Skūpas A., Stakėnas V., Stankus E., Vitkus V. Matematika 12. D. I–II. Vilnius, 2003*; 2) *Razmas R. ir kt. Matematikos uždavinynas. Kaunas, 1997*. Pats mokytojas dar papildomai naudojasi knygomis: 1) *Sičiūnienė V., Mikalauskienė A. Matematika 12. Kaunas, 2006; 2) Šileikienė R., Silvanavičius V. Matematika. Išplėstinis kursas. Vadovėlis XII klasei. Kaunas*, *2006*; 3) *Kolmogorovas A. ir kt. Algebra ir analizės pradmenys 10–12. Kaunas, 1989*; 4) *Biekšienė R., Zenkevičienė M. Matematika 12. Savarankiški ir kontroliniai darbai. Vilnius, 2004*; 5) *Mockus V. ir kt. Mokyklinės matematikos teminio kartojimo užduotys, atitinkančios brandos egzamino programą. Šiauliai, 2004.* Grupinį darbą pamokoje taikė anykštėnė V. Žemaitytė. Darbą poromis pamokoje taikė, kaip jau minėta, mosėdiškis A. Drakšas, obelietė A. Vasiliauskienė. Kitoje pamokoje ji savarankišką darbą liepė atlikti grupėse po 4. Programuoto mokymo elementai buvo taikomi vilnietės G. Davenienės pamokoje (aukščiau pateikto konspekto 8 ir 9 fragmentai), rokiškėnių R. Šarkauskienės ir J. Bernienės pamokose (atsakymams signalizuoti mokiniai naudojo kilnojamuosius skaitmenis), anykštėnės V. Žemaitytės pamokoje (atsakymams signalizuoti, juos užrašant specialiai išdalytuose lapeliuose). Pirmoji mokytoja labai gražiai sukurdavo problemines situacijas. Aiškinantis trupmenos dauginimo iš trupmenos algoritmą, suformuluota problema: „Noriu apsėti žolėmis 1 km^2 sklypo dalį, kurios kraštinės $^1/_3$ *km* ir $^2/_3$ *km*. Koks plotas būtų tuo atveju apsėtas?“ Nubraižius visa tai lentoje ir sąsiuviniuose, akivaizdžiai parodoma, kad $^1/_3 \times {}^2/_3 = {}^2/_9$ (km^2). J. Bernienė gražiai apibendrino pamokoje įgytas žinias apie gretutinius ir kryžminius kampus, pateikdama mokiniams klausimus ir užduotis:

1. Kokios rūšies yra kampas, kai lygus 180°?
2. Kokios rūšies yra kampas, kai jis yra mažesnis už statųjį kampą?
3. Kiek neištiestinių kampų gaunama, susikirtus dviem tiesėms?
4. Kiek negretutinių kampų gaunama, susikirtus dviem tiesėms?
5. Kam lygi gretutinių kampų suma?
6. Kaip vadinami susikirtusių tiesių sudaryti kampai?
7. Paimkite du pieštukus ir parodykite: a) gretutinius kampus; b) kryžminius kampus.

„Matematinę mankštą“ – mintinį skaičiavimą, kaip atskirą pamokos dalį išskyrė dvi vyresniųjų klasių mokytojos. Anykščių A. Baranausko vidurinės mokyklos X klasėje mokytoja V. Žemaitytė pamoką pradėjo mintiniu lentoje iš anksto užrašytų užduočių sprendimu:

1. 3 katinai suėda 3 peles per 3 min. Per kiek laiko 100 katinų suės 100 pelių?
2. 1720 : 100.
3. Dabar 6 h vakaro. Kuri paros dalis liko?
4. 5 *a* = ... m^2.
5. 100 km nuvažiuoti automobilis sunaudoja 5 *l* degalų. Kiek degalų reikės 120 km nuvažiuoti?
6. 2^3 = ..., $(-2)^3$ = ..., -2^3 = ...
7. Mokykloje yra 1000 mokinių. 5 % iš jų yra kairiarankiai. Kiek mokykloje dešiniarankių?
8. sin 30° + cos 45°.
9. Kiek litrų vandens tilps į akvariumą, kurio matmenys 50 cm × 20 cm × 30 cm?
10. $(x-5)^2$ = ...
11. Kiek kainuos lentos supjaustymas į 4 dalis, jei perpjauti lentą pusiau kainuoja 90 ct?

Anykštėnė A. Kuzmienė (J. Biliūno gimnazija) dvyliktokams pasiūlė paralogizmą: reiškinyje $2 \times a : 2 \times a$ veiksmus atliko nuosekliai, iš eilės, ir gavo a^2. Po to paklausė, ar turi prasmę šie reiškiniai: $\sqrt{\log_2 0{,}7}$, $\sqrt{\log_5 5}$, $\sqrt{\sin 30^\circ}$, arc sin (-3). Tos pačios gimnazijos mokytoja B. Navikienė mintinio skaičiavimo pratimus šeštokams pateikė taip, kad jie juos parengtų skritulio ploto skaičiavimui: 6^2 = ...; $a \times a$ = ...; „Stačiakampio ilgis lygus 3 cm, plotis 2 cm. Apskaičiuoti jo plotą“; „Nusibraižykite apskritimą, nubrėžkite jo spindulį ir skersmenį“.

Grynai loginio mąstymo užduočių irgi buvo pateikta kai kuriose pamokose. Antai aukščiau minėtame atraminiame konspekte, kurį mokytoja G. Davenienė pateikė mokiniams, yra tokia 11 užduotis. Obelietė A. Vasiliauskienė devintokams kaip papildomą užduotį ekrane pateikė du loginius uždavinius: 1) Kiek mažiausiai vaikų yra šeimoje, jeigu kiekvienas vaikas turi bent vieną seserį ir 2 brolius? 2) Sauliaus, Vyto ir Lino pavardės yra Kalvaitis, Jonaitis ir Petraitis. Vytas ir Jonaitis domisi matematika, o Vytas ir Petraitis – muzika. Kokia Lino pavardė? (Atsakymai: 1) 5 vaikai, 2 mergaitės ir 3 berniukai. 2) Petraitis). O septintokų savarankiško darbo užduotyse papildoma užduotis buvo tokia: „Mokiniai sustojo ratu ir išsiskaičiavo. 20-sis (10-sis) mokinys stovi tiesiai prieš 53-jį (45-jį). Kiek mokinių buvo sustoję ratu?“ Loginio mąstymo reikalavo anykštėnės V. Žemaitytės „matematinės mankštos“ I ir XI užduotys, kitos anykštėnės – A. Kuzmienės pateiktas paralogizmas bei kitos jos pateiktos užduotys, taip pat šioje pastraipoje minėtų ir neminėtų daugelio kitų mokytojų probleminiai klausimai įvairiose pamokų dalyse.

Anykščių J. Biliūno gimnazijos V–X klasėse dėstančios matematikos mokytojos mokinių pasiekimus per matematikos pamokas vertina „PLIUSU“. Pliusai gaunami už: a) dalykinį iniciatyvumą; b) pagrįstus, motyvuotus atsakymus į dalykinius klausimus; c) aktyvų dalyvavimą pamokoje; d) atsakinėjančio mokinio atsakymo papildymą; e) atsakinėjančio mokinio klaidų taisymą; f) mokytojo padarytos klaidos taisymą; g) teisingą užduoties atlikimą lentoje; h) teisingą ir greitą užduoties atlikimą sąsiuvinyje; j) teisingai atliktą namų darbą; k) gerai atliktą grupinį darbą. Pliusų netenkama, kai: a) vietoje jų įrašomas pažymys; b) mokinys be pateisinamos priežasties neatlieka namų darbo; c) mokinys nesilaiko mokinio taisyklių; d) mokinys neatsineša į pamoką reikiamų darbo priemonių. Bendrieji vertinimo principai: a) vienas pliusas atitinka vieną pažymio balą; b) pliusai dedami į paskutinį sąsiuvinio puslapį iš karto (juos užsidirbus) arba pamokos pabaigoje; c) pliusai neverčiami pažymiu likus vienai savaitei iki trimestro pabaigos; d) pliusai galioja visą laiką iki tol, kol jie virs pažymiu. Mokytojos turi specialius antspaudus „PLIUSAS. Kelias į sėkmę“, tad pliusus sudėti netrunka, o ir apgavystės yra negalimos.

6. MATEMATIKOS MOKYTOJŲ APKLAUSOS REZULTATŲ SUVESTINĖ

Anykščių ir Rokiškio rajonuose, Skuodo rajono Mosėdžio gimnazijoje, Vilniaus šv. Kristoforo vidurinėje ir A. Vienuolio pagrindinėje mokyklose į stebėtų pamokų aptarimą bei paskaitą apie loginio mąstymo ugdymą atėjo ne vien stebėtas pamokas vedę mokytojai, bet ir kiti jų kolegos. Pasinaudojus tuo, visi buvo anketuoti. Apklausta iš viso 46 mokytojai, iš jų 41 (89,13 %) moteris, 5 vyrai (10,87 %). Ši tikrai mažytė imtis šia prasme yra labai reprezentatyvi: mokyklose vyrų matematikų yra iš tiesų labai nedaug. Atsakymai apie mokytojų turimą išsilavinimą parodė, kad aukštąjį išsilavinimą turi visi, 45 (97,82 %) yra įgiję matematikos mokytojo kvalifikaciją, 1 (2,18 %) yra LŽŪU baigusi inžinierė, neakivaizdiniu būdu baigusi ir edukologijos magistrantūrą. Beje, iš 45 turinčiųjų matematikos mokytojo kvalifikaciją magistrantūrą yra baigę 3. Dar 3 nurodė, kad yra įsigiję po kitą aukštojo mokslo diplomą (anglų kalbos, informatikos ir ekonomikos) studijuodami neakivaizdiniu būdu. Daugiausia apklaustųjų mokytojų – 30 (65,28 %) yra baigę dab. VPU (buv. VVPI), iš jų 1 – neakivaizdiniu būdu. 12 (26,09 %) mokytojų yra baigę VU, iš jų 3 – neakivaizdiniu būdu. Dar 2 (4,35 %) yra baigę dab. ŠU (buv. ŠPI), 1 (2,18 %) – Irkutsko PI. Taigi ir čia stebimas gana didelis imties reprezentatyvumas. Pagal darbovietę apklaustieji mokytojai pasiskirstė taip (23 lentelė):

23 lentelė

Apklaustųjų matematikos mokytojų pasiskirstymas pagal darbovietę
(abs. skaičiais ir procentais)

Gimnazija	Vidurinė mokykla	Pagrindinė mokykla
17 (36,96 %)	20 (43,48 %)	9 (19,56 %)

Pagal tai, kokio tipo gyvenvietėje yra darbovietė, apklaustieji mokytojai ir mokytojos pasiskirstė taip (24 lentelė):

24 lentelė

Apklaustųjų matematikos mokytojų pasiskirstymas pagal gyvenvietės, kurioje yra darbovietė,
tipą (abs. skaičiais ir procentais)

Miestas	Miestelis	Kaimas
36 (78,26 %)	6 (13,04 %)	4 (8,7 %)

38 (82,61 %) mokytojų gyvena toje pačioje gyvenvietėje, kurioje ir dirba, 8 (17,39 %) – kitur. Toliausiai važinėjančiam į darbą – 24 km, kiti važinėja 16, 14, 12, 10 km. Pagal kelionės į darbą pobūdį apklaustieji mokytojai ir mokytojos pasiskirstė taip (25 lentelė):

25 lentelė

Apklaustųjų matematikos mokytojų pasiskirstymas pagal kelionės į darbą pobūdį
(abs. skaičiais ir procentais)

Vaikšto pėsčiomis	Važinėja visuom. transportu	Važinėja nuosavu automobiliu
23 (50 %)	10 (21,74 %)	13 (28,26 %)

Pagal pedagoginio darbo stažą apklaustieji mokytojai ir mokytojos pasiskirstė taip (26 lentelė):

26 lentelė

Apklaustųjų matematikos mokytojų pasiskirstymas pagal pedagoginio darbo stažą
(abs. skaičiais ir procentais)

0–5 m.	6–10 m.	11–20 m.	21–30 m.	31 ir daugiau m.
2 (4,35 %)	6 (13,04 %)	10 (21,74 %)	12 (26,08 %)	16 (34,78 %)

Jauni pedagogai dabar nedažnai lieka mokyklose. Tad šios mažytės imties pasiskirstymas irgi yra itin reprezentatyvus. Keletas vyresnių pedagogų nurodė turintys kiek didesnį bendrojo darbo stažą.

Paskaitoje girdėtas mintis apklaustieji mokytojai ir mokytojos įvertino taip (27 lentelė):

27 lentelė

Apklaustųjų matematikos mokytojų pasiskirstymas pagal tai, kaip jos įvertino paskaitoje girdėtas mintis apie loginio mąstymo ugdymą mokantis matematikos
(abs. skaičiais ir procentais)

Mintys mažai girdėtos	Mintys girdėtos	Mintys gerai žinomos
18 (39,13 %)	25 (54,35 %)	3 (6,52 %)

Atsakydami į kitą anketos klausimą apie žinių įgijimo kelius, pedagogai nurodė, kad dalis jų tebesinaudoja jau senokai nieko neberašančiu tais klausimais „Dialogo“ laikraščiu (matyt, ir jo pirmtaku „Tėvynės šviesa“), jau nebeleidžiamu žurnalu „Alfa plius omega“, 29 – teigė daug ką sužinantys kvalifikacijos kėlimo renginiuose, 11 (23,91 %) – nuolat naudojasi internetu, 12 – naudojasi senesne literatūra, pora iš jų – ir rusiška literatūra.

Valstybinį matematikos egzaminą teigiamai vertino 41 respondentas (89,13 %), nurodydami, kad taip objektyviai patikrinamos žinios, tai skatina mokinius sąžiningiau mokytis, nereikia stojamųjų egzaminų. 5 (10,87 %) mokytojai nurodė, kad valstybinį egzaminą vertina neigiamai. Tai tiesioginė 2006 m. skandalo įtaka: teigė, kad nėra užtikrintas reikiamas užduočių įslaptinimo lygis, užduotys vis sunkėja, ne visai užtikrinama abiturientų atsakomybė – neišlaikius valstybinio egzamino, tais pačiais metais leidžiama perlaikyti (neaišku tik, kaip per tiek mažai laiko tam galima pasiruošti). Beje, tokių atsakymų buvo vienas kitas ir tarp teigiamai įvertinusių valstybinį egzaminą.

7. DIDAKTINĖ MATEMATIKOS MOKYMO LIETUVOJE BAZĖ

Vadovėliais ir pratybų sąsiuviniais bei kitomis mokymo priemonėmis mokytojai nesiskundžia. Sovietinių laikų vadovėliai, pratybų sąsiuviniai ir kitos mokymo priemonės praktiškai atitiko laikmečio dvasią, pasaulinius matematikos didaktikos pasiekimus. Maskvoje leistas žurnalas „*Математика в школе*“ („Matematika mokykloje“) buvo laikomas vienu geriausių pasaulyje tokio tipo žurnalų. Bet sovietiniai vadovėliai beveik netiko matematikos mokymo sąryšiui su realiu gyvenimu palaikyti: buvo parašomi daugiausia Maskvoje ir naudojami visose Rusijos srityse, taip pat verčiami į „broliškųjų“ respublikų kalbas, tad nebuvo įmanoma pateikti konkrečios respublikos ar srities mokiniui artimų uždavinių. Pirmieji tautiniai lietuviški vyresniosioms klasėms skirti vadovėliai, iš pradžių kaip eksperimentiniai, pasirodė 1995 m. [19, 39]. Rinkos sąlygomis tvirtesnes pozicijas išsikovojo antrasis – N. Cibulskaitės ir M. Stričkienės vadovėlis. Jau pats jo pavadinimas liudijo autorių ryžtą sukurti tikrai tautinį lietuvišką matematikos vadovėlį. Jos parašė ir šio vadovėlio tęsinį VI klasei, įsiliejo ir į autorių kolektyvus, rašiusius vadovėlius aukštesnėms klasėms. Dabar visi matematikos vadovėliai vyresniosioms klasėms – tautiniai. Praėjo daugiau kaip dešimt metų nuo pirmųjų tautinių matematikos vadovėlių pasirodymo. Per tą laikotarpį įvyko didelės permainos Lietuvos švietime – buvo formuluojami nauji ugdymo tikslai, vertybinės nuostatos, keitėsi bendrojo ugdymo turinys, diegiamos Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklų bendrosios programos ir išsilavinimo standartai, sukurta nauja valstybinių egzaminų sistema, žmonija perėjo į XXI amžių. Tai diktuoja naują požiūrį į vadovėlius, todėl N. Cibulskaitė nutarė parašyti naują vadovėlį penktajai klasei [37, 38]. Jau pats pavadinimas pabrėžia, kad tai XXI a. matematikos vadovėlis. Autorė siekė, kad šis vadovėlis visiškai atitiktų bendrųjų programų bei išsilavinimo standartų reikalavimus ir pateiktų V klasės mokiniams vertybinių nuostatų, dalykinių ir bendrųjų gebėjimų, kompetencijų ugdymui(-si) reikalingą informaciją ir užduočių sistemą. Kiekvieno bendrojo lavinimo dalyko vadovėliui dabar yra keliamas reikalavimas padėti mokiniui susiformuoti Lietuvos piliečiui patikimus orientyrus, padedančius saugoti, stiprinti savo pilietinį, kultūrinį ir tautinį tapatumą. Todėl autorė stengėsi, kad vadovėlio medžiaga orientuotų mokinius į humaniškumo, demokratiškumo, atsinaujinimo, nacionalumo bei atvirumo kitoms kultūroms gyvenimo principų supratimą bei priėmimą. Vadovėlį autorė rengė remdamasi atlikto tyrimo, apibendrinto jos 2000 m. apgintoje daktaro disertacijoje apie matematikos mokymo humanizavimą V klasėje, rezultatais bei išvadomis. Todėl vadovėlis ir yra orientuotas į mokinių vertybinių nuostatų kūrimą. Tai pirmiausia atsispindi mokiniams skirtame vadovėlio įvade, kuriame paaiškinti skirtingų tipų uždavinius žymintys simboliai, susieti su vadovėlio pagrindinių veikėjų apibūdinimuose minimomis humaniško elgesio apraiškomis. Antai užduotys, pažymėtos kvadratėliu, yra skirtos visiems mokiniams, jos turi padėti įtvirtinti naujai suformuotas sąvokas, veiksmų atlikimo algoritmus ir t. t. – su šiuo ženklu susijęs smalsus, jautrus, dėmesingas, užjaučiantis, visiems padedantis zuikis; skrituliuku pažymėtos užduotys reiškia darbščią, atsakingą, pareigingą, sąžiningą, veiklią voveraitę – tad šios užduotys skirtos kartojimui; rombas žymi įžvalgų, orų, gerbiantį kitus ir save, atlaidų gandrą – tai tyrinėjimus mėgstantiems mokiniams skirtos užduotys; trikampio ženklas žymi itin matematiką mėgstantiems mokiniams skirtas užduotis, jo simbolis – išmintingas, atviras, teisingas, pasitikintis savimi ir kitais, nuoširdus žalčiukas. Orientavimasis į mokinių vertybinių nuostatų kūrimą atsispindi ir teorinės medžiagos bei pateikiamų užduočių turinyje. Pavyzdžiui, pirmajame skyriuje teorinė medžiaga pateikiama Lietuvos kaip valstybės charakteristikų analizės kontekste (kalbama apie Europos geografinį centrą, sienas su kaimyninėmis valstybėmis, Baltijos jūros regioną). Antrajame skyriuje kalbama apie Lietuvos valstybingumo įtvirtinimą (aptariamos Lietuvos istorinės sostinės, vardijami Lietuvos didžiojo kunigaikščio Gedimino nuopelnai). Ketvirtajame ir devintajame skyriuose daug kalbama apie smulkųjį verslą, jo plėtrą (Lietuvai aktualios problemos), septintajame ir dešimtajame skyriuose – apie gamtosaugą (visam pasauliui svarbios problemos).

Autorė siekia, kad vadovėlis atitiktų diferencijuoto ir individualizuoto mokymo(-si) poreikius, kad jis būtų geras pagalbininkas mokiniui dirbant su juo savarankiškai, pateiktų mokiniams mokymosi strategijas ir būdus, pritaikytus įvairiems mokymosi stiliams. Šiandieninės mokyklos klasėje dažnai kartu mokosi skirtingų gebėjimų vaikai – nuo pagal specializuotas programas besimokančių iki ypač gabių*. Įvairių gebėjimų mokiniams šiuo metu mokytojas, deja, ne visada turi galimybių pamokoje skirti pakankamai dėmesio. Vadovėlis turėtų padėti pedagogams išspręsti šią problemą, kadangi sudaro galimybes pajėgiems mokiniams nuo V klasės mokytis iš dalies savarankiškai; tokiu būdu galima diferencijuoti ir individualizuoti mokymą. Prieš kai kurias užduotis yra nuorodos, kad jas geriausia atlikti dirbant poromis ar grupėje, mo-

* Autorius yra priešininkas beatodairiškos integracijos į mokyklas tokių mokinių, kurie turi vystymosi, ypač protinio, sutrikimų: tai įmanoma nebent tada, kai mokyklai labai talkina integruoto mokinio tėvai. Tačiau jei ir tėvai yra tokie patys – o tai būna, deja, dažnai, tokius vaikus būtina, dedant visas pastangas, siųsti mokytis į specializuotas mokyklas: ten jie pramoks bent amato ir bus pagal specialias metodikas apmokyti bendrojo lavinimo dalykų minimumo. Išėję iš vidurinės mokyklos problemiškoje šeimoje jie patirs tik sunkumus. Be to, autorius yra įsitikinęs, kad pasitaikantys atvejai Vakaruose, kai paauglys atsineša į klasę ginklą ir ima šaudyti į mokytojus ir mokinius, yra tokio integravimo padarinys: paaugęs vaikas ima suprasti, kad jis beviltiškai atsilikęs nuo klasės draugų, o tie būna paaugliškai negailestingi, iš jo nuolat šaiposi. Tad vieną kartą ir imamasi keršto...

koma spręsti problemas (yra uždavinių su patarimais). Vadovėlis parašytas mokiniui – teorinė medžiaga dažniausiai pateikiama sprendžiant su mokinio aplinka bei interesais susijusius uždavinius. Išryškinama esminė medžiaga (taisyklės, algoritmai), tai paaiškinama pavyzdžiais. Siūlomi savarankiškos struktūros darbai. Pateikta aiški pratimų ir uždavinių sistema, kuri glaustai aprašyta vadovėlio įvade. Yra pateikti pasiekimų įsivertinimo būdai – tipinių užduočių teisingo atlikimo ir užrašymo pavyzdžiai, patarimai, kaip reikia spręsti sudėtingesnes užduotis, savikontrolės testai ir skyrelių „Pasitikrinkite“ atsakymai. Mokiniai skatinami atlikti praktines, tyrimų, kūrybines ir ekskursijų užduotis (pavyzdžiui, projektai „Skruzdėlė – galiūnė“ ir „Vitražas“, ekskursijos po Kernavės piliakalnius ir Vilniaus senamiestį). Vadovėlyje yra užduočių, skirtų dėsningumų paieškos, hipotezių formulavimo ir tikrinimo, problemų sprendimo, strategijų kūrimo, kritinio mąstymo gebėjimams lavinti. Išskirtinis vadovėlio bruožas – kiekvieno skyriaus pradžioje lentelėse, diagramose, žemėlapiuose pateikta įvairi, pagal galimybes naujausia informacija, 2000–2005 m. statistiniai duomenys, reikalingi nagrinėjant teorinę medžiagą arba atliekant užduotis. Tokia medžiaga skirta informacijos paieškos, jos apdorojimo ir analizės gebėjimams ugdyti.

Su vadovėliu pradėta dirbti keliose mokyklose 2005–2006 m. m., vykdant VPU Matematikos ir informatikos didaktikos katedros organizuotą eksperimentą. Grupė mokytojų: G. Damaševičienė (Kėdainiai), G. Grybienė (Klaipėda), T. Gurštynovič (Vilnius), A. Kuzmarskienė (Tauragė), P. Puzinaitė (Širvintos), V. Sakalauskienė (Vilnius), A. Ūsienė (Jieznas), V. Žilevičienė (Vilnius) rengia pagal aptariamą vadovėlį uždavinyną. Mokomąjį-didaktinį komplektą papildys parengti pratybų sąsiuviniai bei autorės rengiama mokytojo knyga.

Tokią platoką šio tikrai puikaus XXI a. matematikos vadovėlio analizę pateikėme kaip savotišką etaloną: būtent tokiu būdu rengiami mokomieji didaktiniai komplektai visoms vyresniosioms klasėms iki XII klasės imtinai. Taigi atsižvelgiant į tai, kad vadovėliai vėl tapo tautiniai, galima pasidžiaugti, kad tęsiamas geriausių prieškarinių vadovėlių pradinukams ir gimnazistams autorių: Prano ir Jono Mašiotų, Juozo Damijonaičio, Antano Busilo, Zigmo Balučio-Balevičiaus, Kazio Klimavičiaus, Juozo Baltūsio ir daugelio kitų pradėtas tautinių vadovėlių kūrimas [5, 6, 12–14].

Labai daug išleidžiama įvairių užduočių rinkinių mokiniams valstybiniams egzaminams pasirengti. Kai kurias iš jų mes čia paminėjome. Jų vertė įvairi – kai kuriuose užduočių sprendimai gal ir ne visai racionalūs. Tai bendru atveju laikytina komercine literatūra – autoriai tikisi iš jos pasipelnyti, viliodami abiturientus pirkti tas užduotis. Tačiau geriausios iš jų yra vertingas įnašas į Lietuvos matematikos didaktiką.

Kai ką apie matematikos didaktiką parašo Lietuvos aukštųjų mokyklų ir mokslo įstaigų leidžiami recenzuojami žurnalai. Tačiau mokytojų apklausa parodė, kad jie tų žurnalų visai nežino ir straipsniais, išspausdintais juose, nesinaudoja, nebent išskyrus nedidelę dalį tų respondentų, kurie nurodė, jog naudojasi internetu.

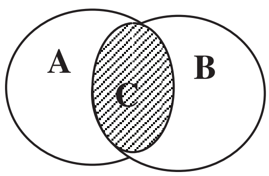
Daugelis mokytojų neigiamai vertina Banguolės Druskytės pseudonimu leidžiamas knygas atitinkamų klasių mokiniams, laiko jas parazitine matematine literatūra, nes jose pateikiami visų vadovėliuose pateikiamų užduočių sprendimai. Tai trukdo objektyviai spręsti apie mokinių namų darbų atlikimo kokybę. Tačiau šios knygos vaidina ir pozityvų vaidmenį – pratina mokinius dirbti su matematine literatūra, padeda mokiniams suprasti įvairių užduočių sprendimus.

Kaimynai latviai mus lenkia. Jie turi šešis kartus per metus išeinantį gana rimtą pedagoginį žurnalą mokytojams „*Skolotājs*“ („Mokytojas“), jo redkolegijoje – ne tik labiausiai patyrę mokytojai, bet ir žinomiausi pedagogikos ir psichologijos mokslininkai, tarp jų ir Lietuvos atstovė – psichologė prof. habil. dr. Danguolė Beresnevičienė. Dar eina ir „*Skolotāja almanahs*“ („Mokytojo almanachas“), „*Sākums*“ („Pradžia“) – pradinių klasių ir ikimokyklinių ugdymo įstaigų pedagogams. Pastariesiems yra skirtas ir žurnalas „*Pirmskolas izglītiba*“ („Ikimokyklinis ugdymas“). Eina ir savaitraštis „*Izglitība un kultūra*“ („Ugdymas ir kultūra“) (24 p., su priedais). Rusų mokykloms leidžiamas savaitraštis „*Образование и карьера*“ („Ugdymas ir karjera“).

X. TARPDALYKINIŲ RYŠIŲ REALIZAVIMAS DĖSTANT LOGIKĄ GENEROLO JONO ŽEMAIČIO LIETUVOS KARO AKADEMIJOS KARIŪNAMS

Pirmiausia aptarsime terminus, nes pedagogikoje, kaip ir visame mūsų šiandieniniame gyvenime, pereinant nuo ankstesnės orientacijos į Rytus vis labiau krypstama į Vakarus. Todėl tos pačios pedagoginės sąvokos kartais įvairių autorių darbuose dabar skirtingai įvardijamos. Sudėtinga pedagoginė sąvoka „vidinė dalykinė ir tarpdalykinė integracija“ reiškia iš esmės ne ką kita, kaip dar plačiai vartojamą sąvoką „dalykiniai ir tarpdalykiniai ryšiai“.

Dėstydamas logiką kariūnams, stengiuosi vidinę dalykinę ir tarpdalykinę integraciją taikyti mokymo procese. Pavyzdžiui, vidinės dalykinės integracijos būdu išaiškinu loginių klasių (aibių) sankirtą (47 pav.):

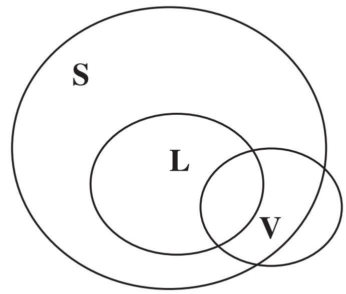


$$A \cap B = C$$

47 pav.

Tuojau pat pateikiu elementarų, kariūnams labai suprantamą pavyzdį: „Tegu A – karininkai, B – dėstytojai. Kas bus C?“ Žinoma, labai greitai išsiaiškiname, kad C – tai dėstytojai, kurie turi karininko laipsnį. Pateikiami konkretūs su LKA susiję pavyzdžiai. Po to einame prie atvejų, kurie labai dažni mokslo srityje, pvz., 1) „jei A – matematika, B – istorija, tai C – matematikos istorija“; 2) „jei A – geografija, B – ekonomika, tai C – ekonominė geografija“; 3) „jei A – verslas, B – vadyba, tai C – verslo vadyba“, ir t. t. Tačiau dėl priežasčių, kurias aptarsime vėliau, ne visi kariūnai lengvai išsprendžia uždavinį: „Kaip pavaizduoti šių trijų klasių santykį: S – stačiakampiai, R – rombai ir K – kvadratai?“ Iš tiesų tai ir bus tas pats atvejis: čia S = A, R = B, o K = C.

Geografinių ir etnografinių žinių kariūnams prireikia, kai atliekame kitas užduotis. Pavyzdžiui, pavaizduoti grafiškai šių trijų klasių santykį: „S – slavai, L – lenkai, V – Varšuvos gyventojai“. Teisingas atsakymas (48 pav.):



48 pav.

Matematinių ir ekonominių žinių poreikis atsiranda atliekant tokią užduotį iš sofizmų srities: ,,Kepurių parduotuvėje žmogus pirko kepurę už 3 Lt ir pardavėjui padavė 10 Lt. Pardavėjas neturėjo grąžos, todėl nubėgo pas kaimyną ir tą 10 Lt banknotą iškeitė smulkesniais. Grįžęs pirkėjui atidavė 7 Lt grąžos ir šis su kepure išėjo. Po kurio laiko atbėgo kaimynas ir pranešė, kad 10 Lt, kuriuos jis iškeitė – netikri. Pardavėjas pasiėmė netikrą banknotą, o kaimynui atidavė 10 Lt. Kokį nuostolį jis patyrė?“ Kyla nemaža diskusijų, teigiama, kad nuostolis – 17 ar net 20 Lt. Tačiau išsiaiškiname, kad jis lygus 10 Lt – netikro banknoto vertei.

Žinoma, tokių tarpdalykinės integracijos – ryšio su realiu gyvenimu bei kitais mokomaisiais dalykais – pavyzdžių daug pateikiu per paskaitas ir pratybas. Kariūnai taip pat nuolat skatinami pateikti pačių sugalvotus ar parinktus pavyzdžius. Mokydamiesi studijų dalyko jie privalo atlikti 2 kontrolinius ir 2 savarankiškus darbus. Pirmajame kontroliniame darbe iš 4 užduočių viena sudaryta iš pačių kariūnų parinktų pavyzdžių, o visos tokios užduotys yra abiejuose savarankiškuose darbuose ir antrajame kontroliniame darbe.

Visa tai padeda įdomiai organizuoti paskaitas, ypač pratybas, skatinti kariūnus savarankiškai dirbti ir pasiekti gerų rezultatų stengiantis suvokti mokomąją medžiagą.

Dabartinės Lietuvos vidurinės mokyklos veiklos pagrindiniame dokumente – ,,Bendrosiose programose ir išsilavinimo standartuose“ – nurodoma, kad mokykla turi užtikrinti darnią prigimtinių moksleivio galių plėtotę, atskleisti ir plėtoti kūrybines moksleivių galias, ugdyti moksleivių gebėjimą kritiškai mąstyti, spręsti problemas, ugdyti pasitikėjimą savo jėgomis, savarankiškumą, nuostatą ir gebėjimą mokytis visą gyvenimą [34 a, b], taigi – lavinti ir loginį mąstymą.

Labiausiai loginį mąstymą vidurinėje mokykloje ugdo tie mokomieji dalykai, kuriuos dėstant mokoma aiškiai suformuluoti sąvokų apibrėžimus, jas klasifikuoti, kur naudojamasi nededukciniais samprotavimais (gramatika, fizika, chemija, istorija, geografija, muzika ir kt.). Visu tuo loginiu aparatu remiasi ir matematika, kuri aukštesnėse vidurinės mokyklos klasėse dar papildomai labai dažnai ima remtis ir dedukciniais samprotavimais bei įrodymais.

Taigi pagrindinis šio skyriaus akcentas – buvusių vidurinės mokyklos mokinių, jau tapusių studentais – LKA kariūnais, matematinio pasirengimo įtakos logikos dalyko studijų rezultatams tyrimas. Mūsų parengtoje mokomojoje knygelėje „Logikos pratimai“ [10], skirtoje teorinių logikos žinių taikymo mokėjimams ir įgūdžiams formuoti, remiamasi ne tik kitų vidurinėje mokykloje nagrinėtų dalykų (fizikos, geografijos, istorijos ir t. t.) elementariomis žiniomis ir bendro išprusimo faktais, bet ir paprasčiausiomis kariūnų mokyklinės matematikos žiniomis. 1999–2000 m. įstoję į LKA kariūnai laikydavo tik paprastą, pažymiu nevertinamą įskaitą. Tad tyrimo metu buvo fiksuojama, ar kontroliniuose darbuose kariūnai darė matematikos klaidų (ar nedarė jų) ir ieškota ryšio su matematikos rezultatais. 1999 m. ir 2000 m. įstojusių į LKA kariūnų, dariusių ir nedariusių su matematika susijusių klaidų kontroliniuose darbuose, pasiskirstymas ir jų priklausomybė nuo matematinio pasirengimo, įgyto vidurinėje mokykloje, matyti 28 lentelėje. Matematinis pasirengimas išaiškinamas pagal matematikos valstybinių egzaminų rezultatus.

28 lentelė

1999 ir 2000 m. įstojusių į LKA kariūnų matematikos VE pažymiai ir matematinio turinio logikos užduočių atlikimo rezultatai, rodantys jų tarpusavio ryšį
(abs. skaičiais)

Matematinio turinio užduočių atlikimas	Matematikos VE pažymiai							Iš viso
	4	5	6	7	8	9	10	
Be matematikos klaidų	–	9	7	8	8	7	4	43
Su matematikos klaidomis	3	12	6	10	3	1	–	35
Iš viso	3	21	13	18	11	8	4	78

Kontingencijos koeficientas C=0,391 ($p<0,01$), t. y. šis koeficientas statistiškai reikšmingas [35, p. 95–97] ir nagrinėjamasis ryšys yra gana glaudus.

2001 m. ir vėliau įstoję kariūnai jau turėjo laikyti arba logikos diferencinę įskaitą (I kurse – personalo vadybos ir transporto inžinerinės vadybos specializacija), arba egzaminą (III kurse – tarptautinių santykių specializacija). Kadangi pažangumas iš logikos visais mokslo metais buvo aukštas, tai buvo atrinkti ir ypač stebimi tie kariūnai, kurie atėjo į akademiją atsinešdami ne mažesnį kaip vidutinišką (pervedus į dešimtbalę sistemą – 7) matematikos VE įvertinimą.

Matematikos VE ir logikos diferencinės įskaitos (egzamino), laikytų I (III) kurse 2001–2005 m. įstojusių į LKA kariūnų, pažymių sutapimas atsispindi 29 lentelėje.

29 lentelė

2001–2005 m. įstojusių į LKA kariūnų matematikos VE ir logikos diferencinės įskaitos
(egzamino) pažymių tarpusavio ryšys (abs. skaičiais)

Logikos diferencinės įskaitos (egzamino) pažymiai	Matematikos VE pažymiai				Iš viso
	7	8	9	10	
8	3	10	18	7	38
9	33	39	59	34	165
10	15	20	54	32	121
Iš viso	51	69	131	73	324

Čia turime C=0,430 ($p<0,001$), t. y. nagrinėjamasis ryšys yra ypač glaudus.

Stebint 29 lentelėje aptartus kariūnus kartu buvo fiksuota jų vidurinės mokyklos (gimnazijos) baigimo vieta. Logikos diferencinės įskaitos (egzamino) įvertinimo nuokrypio nuo matematikos VE pažymio ir kariūnų baigtos mokyklos dislokacijos priklausomybė pateikta 30 lentelėje.

30 lentelė

Logikos diferencinės įskaitos (egzamino) pažymio nuokrypio nuo matematikos VE pažymio priklausomybė nuo kariūnų baigtos mokyklos dislokacijos
(abs. skaičiais)

Vieta, kur baigta mokykla	Logikos pažymio nuokrypis nuo matematikos VE pažymio								
	-2	-1	0	1	2	3	Iš viso	Vidurkis ($\bar{x}$)	Vidutinis standartinis nuokrypis (s)
Sostinė, apskričių centrai	4	27	46	48	24	3	152	0,46	7,19
Rajonų centrai	3	15	33	29	15	7	102	0,48	3,88
Mažesni miestai ar miesteliai	–	10	22	19	14	5	70	0,74	5,71
Iš viso	7	54	101	96	53	15	324	0,55	8,81

Taigi turime $s_1 > s_3 > s_2$, t. y. labiausiai varijuoja sostinės ar apskričių centrų mokyklų abiturientų logikos pažymiai. Tai nestebina: didesnių miestų mokiniai paprastai turi daugiau informacijos, ta informacija jiems tenka daugiau naudotis, tad lemia čia ne vien matematikos VE pažymys.

Antroje vietoje – mažesnių miestų ar miestelių mokyklų abiturientai. Tai paprastai tų mokyklų elitas – į LKA įstoti nėra taip lengva. Todėl ir jų logikos žinios nėra nulemiamos vien matematikos VE rezultatų. Mažiausiai varijuoja rajonų centrų mokyklų abiturientų pasiskirstymas. Jis gana artimas normaliniam. Čia ryškiausiai pasireiškia koreliacija tarp logikos ir matematikos VE pažymių.

Kadangi 2001–2005 m. priimtieji į I kursą kariūnai buvo daug geriau atrenkami, jų ir matematinis pasirengimas daug geresnis negu 1999 ir 2000 m. priimtųjų. Matematinio turinio užduotis jie atliko kur kas geriau. Tačiau nusiraminti ir džiaugtis neblogais rezultatais niekada negalima. Dalis kariūnų (taip pat ir abiturientų) vidurinėje mokykloje nesusiformuoja tvirtų matematinių sąvokų, kartais net gana elementarių.

Iš šio tyrimo išplaukia tokios išvados:

1. Mokinių mokyklinis matematinis pasirengimas turi didelę reikšmę logikos, o kartu ir kitų dalykų studijų rezultatams. Pasirengimo lygis objektyviai nustatomas pagal matematikos VE rezultatus.
2. Aukštųjų mokyklų logikos ir matematikos dėstytojai, ateidami į pagalbą vidurinių mokyklų mokytojams, galėtų:
   a) susipažinti su jaunų mokytojų, vyresniųjų mokytojų, mokytojų metodininkų ir mokytojų ekspertų darbu ugdant loginį mokinių mąstymą mokymo procese;
   b) visais išvardytais atvejais apibendrinti gerąją patirtį, teikti rekomendacijas pedagogų darbui ir jų rengimui gerinti, tobulinti vadovėlius ir kitas mokomąsias priemones.

IŠVADOS

1. Mokyklinė matematika ir logika yra nepaprastai susiję. Tad loginio mokinių mąstymo ugdymas, kuris yra itin akcentuojamas Lietuvos švietimo ir mokslo ministerijos parengtose ir nuolat tobulinamose, koreguojamose „Bendrosiose programose ir išsilavinimo standartuose“, mokykloje kuo geriausiai realizuojamas mokant matematikos: čia pasinaudojama praktiškai visu formaliosios logikos arsenalu.
2. Dėstant logiką stebėti VGTU studentų ir LKA kariūnų mokymosi rezultatai, atlikta jų apskaita. Atskleisti glaudūs koreliaciniai ryšiai tarp tų rezultatų ir matematikos VE pažymių leidžia tvirtinti, kad sėkmingai išlaikę VE mokiniai iš tiesų yra susiformavę gerus loginio mąstymo įgūdžius, o tai savo ruožtu leidžia tvirtinti: a) valstybiniams egzaminams mokinius rengę pradinių klasių ir vyresniųjų klasių matematikos mokytojai tinkamai lavino jų loginio mąstymo gebėjimus; b) VE įvedimas – pats sėkmingiausias Lietuvos mokyklos reformos žingsnis (jį teigiamai vertino ir didelė dauguma apklaustų matematikos mokytojų).
3. Stabiliausi koreliaciniai ryšiai tarp logikos mokymosi sėkmės ir matematikos VE rezultatų yra nustatyti tarp LKA kariūnų, baigusių rajonų centrų mokyklas, antroje vietoje yra mažesnių miestų ir miestelių abiturientai, trečioje –Vilniaus ir apskričių centrų abiturientai.
4. Geriausių pradinių klasių ir vyresniųjų klasių matematikos mokytojų pamokų stebėjimas atliktas autoriaus, sukaupusio didelę daugiau kaip 30 metų šio darbo patirtį ir po to 20 metų šioje veikloje nedalyvavusio, parodė, kad mokytojų pamokiniame darbe, įgyvendinant Lietuvos mokyklos reformą, yra daug reikšmingų teigiamų pokyčių: a) jie turi galimybę naudotis tautiniais matematikos vadovėliais (pradinėse klasėse – net rinktis vieną iš trijų matematikos mokymo sistemų, pamažu ta galimybė realizuojama ir vyresniosiose klasėse), kurie leidžia matematiką susieti su kitais mokomaisiais dalykais ir realiu gyvenimu, o tai sužadina didesnį mokinių interesą matematikai; b) tai, kad mokyklos aprūpinamos kompiuterine technika ir dauginimo bei kopijavimo įrenginiais, leidžia mokytojams plačiau naudotis įvairia dalijamąja didaktine medžiaga savarankiškiems mokinių darbams organizuoti; c) kai kurie vyresniųjų klasių matematikos mokytojai jau gana sėkmingai taiko kompiuterinę techniką perteikdami mokiniams mokomąją medžiagą; d) visi stebėti mokytojai yra puikiai įvaldę euristinio pokalbio bei savarankiško mokinių darbo organizavimo metodus ir sėkmingai juos taiko pamokose; e) jau neretai stebėtose pamokose pasitaiko didaktinis mokymo diferencijavimas (grupinis darbas ir kt. jo formos).

5. Atskirai pabrėžiant didelį Lietuvos mokyklos reformos laimėjimą – tautinių matematikos vadovėlių sukūrimą, būtina pažymėti, kad tai Lietuvos mokykloje patikrintos tradicijos tąsa – tokie vadovėliai jau buvo ikikarinėje Nepriklausomoje Lietuvoje ir tais laikais užtikrino gana sėkmingą mokinių loginio mąstymo gebėjimų vystymą, aukštą matematikos žinių ir įgūdžių lygį. Skirtumai, kuriuos lemia laikmetis, yra palankūs dabartinei mokyklai: a) ištobulėjusi spausdinimo technika vadovėlius dabar leidžia rašyti ir spausdinti su kur kas įvairesne spalvine ir šriftų, lentelių, iliustracijų įvairove; b) yra ypač svarbu tai, kad vadovėliai ir kitos mokomosios knygelės rašomos autorių kolektyvų, prieš tai geriausiems mokytojams juos eksperimentiškai patikrinus; autorių kolektyvuose – geriausi mokytojai ekspertai ir matematikai mokslininkai; toks teorijos ir praktikos lydinys užtikrina aukštesnį dalykinį ir metodinį vadovėlių lygį.
6. Mokytojų apklausos ir realios tikrovės analizės rezultatai leidžia konstatuoti gana neblogos didaktinės bazės pradinio matematikos mokymo egzistavimą: mokytojų patirtis skelbiama, matematikos didaktikos srityje dirbantys mokslininkai savo straipsnius nuolat skelbia 6 kartus per metus išeinančiame žurnale „Žvirblių takas“, leidžiamos monografijos ir knygos pradinio matematinio ugdymo klausimais, organizuojama nemaža mokslinių praktinių konferencijų, kuriose aptarinėjami ir pradinio matematikos mokymo klausimai. Todėl ir loginio mąstymo ugdymo problemos, kaip parodė mokytojų apklausa, daugumai mokytojų yra girdėtos, o kai kam ir gerai žinomos.
7. Vyresniosiose klasėse matematiką dėstančių matematikos mokytojų savišvietos ir pasidalijimo patirtimi problemos kur kas sudėtingesnės: periodinio leidinio, kuris tuo rūpintųsi, praktiškai nėra, nors bandymų buvo. Pirmiausia tai daugiausia VU doc. dr. Viliaus Stakėno pastangomis leistas žurnalas „Alfa plius omega“, kuris greitai nustojo eiti perėmus leisti leidyklai TEV. Kauno matematikos mokytojų leistas leidinys „Matematika ir mokykla“, mirus jo iniciatorei mokytojai ekspertei Reginai Žilvienei (1946 – 2003), irgi nustojo eiti. Laikraštis „Dialogas“ irgi beveik nieko neberašo matematikos mokymo klausimais. Lietuvos matematikų draugija savo kasmetinėse konferencijose visada organizuoja matematikos didaktikos sekciją, joje matematikos didaktikos srityje dirbantys mokslininkai paskaito gerų pranešimų, kai kurie jų paskelbiami ir „Lietuvos matematikos rinkinyje“. Tačiau tų pranešimų negirdi Lietuvos matematikos mokytojai – jie beveik nebedalyvauja šiose konferencijose. Apklaustieji mokytojai apie šio rinkinio egzistavimą, matyt, nelabai žino, nes tiesiogiai jo, kaip savišvietos šaltinio, nenurodė. Matematikos mokytojų asociacija, priešingai, į savo konferencijas nekviečia mokslininkų. Jos darbų apklaustieji mokytojai irgi kaip kvalifikacijos kėlimo šaltinio nenurodė. Matyt, reikėtų imtis iniciatyvos leisti mokslinį metodinį žurnalą vyresniųjų klasių mokytojams, kaip tai

daroma kaimyninėje Latvijoje, kuriame galėtų rašyti ir mokytojai, ir mokslininkai, o redakcinėje kolegijoje irgi būtų atstovaujamos abi pusės (prisiminkime neseniai bereikalingai „numarintą“ „Tautinės mokyklos“ žurnalą). Mokytojų apklausa parodė, kad tarp vyresniųjų klasių matematikos mokytojų yra daugiau tokių, kuriems loginio mąstymo ugdymo klausimai mokant matematikos yra mažai žinomi, o gerai šią problemą išmanančių yra nedaug.

8. Stebėtos pamokos atsitiktinai paimtuose rajonuose ir mokyklose liudija, kad pedagoginio darbo meistrų turime daug. Mokytojai, kuriems kas nors sekasi sunkiau, gali elementarios patirties pasisemti savo mokykloje, rajone ar mieste.
9. Didesnė pusė apklaustųjų matematikos mokytojų turi daugiau kaip 20 metų darbo stažą, o pradinių klasių – netoli pusės. Tai liudija apie mokytojų senėjimą, jaunų mokytojų į mokyklas ateina vis mažiau. Tai tampa jau valstybine problema: o kam tada reikia pedagoginio universiteto, kitų universitetų fakultetų, rengiančių pedagogus? Matematikos didaktikos padėtis aukštosiose mokyklose irgi vis prastėja. Praktiškai nebėra tokios katedros, kuri „duotų toną“ visai Lietuvos matematikos didaktikai. Ilgokai šia prasme pirmavusi pradinio matematikos mokymo srityje ŠU matematikos didaktikos katedra panaikinta – sujungta su kitų didaktikų katedromis. VPU matematikos ir informatikos didaktikos katedra daug metų turėjo tik formalų vadovą, beje, ne matematikos didaktikos, o tikimybių teorijos specialistą, einantį ir kitas pareigas, ir seniai yra nebetekusi turėtos nemažos įtakos Lietuvos matematikos didaktikos raidai. VU matematikos didaktikos problemomis domisi irgi ne matematikos didaktikos specialistai (jų ten nėra), o „grynosios“ matematikos šakose pasireiškę mokslininkai.
10. Tarp apklaustųjų pradinių klasių mokytojų nebuvo nei vieno vyro, tarp matematikos mokytojų vyrų buvo 10,87 %. Beje Rokiškio ir Anykščių rajonuose apklausoje dalyvavo visi matematikos mokytojai vyrai (jų tuose rajonuose yra po 2). Tai irgi tampa valstybės problema.
11. Klausimai, susiję su mokytojų darbo vieta, kelionėmis į darbą didelių problemų neatskleidė.

LOGIC AND THE SCHOOL MATHEMATICS

Summary

In the Introduction to the Monograph, the standards set for developing logical thinking of pupils set by the key documents for regulating the activities of the secondary school are discussed upon. In the Chapter One of the Monograph, the general knowledge in formal logic needed for a mathematics teacher is provided. Theoretical statements are illustrated with mathematical examples. In the Chapter Two of the Monograph, the methodics of formation of mathematical concepts at school along with types of mathematical definitions and applying of classification in school mathematics are discussed upon. In the Chapter Three of the Monograph, applying of non-syllogistic considerations, such as induction, analogy, formation of hypotheses to formation of mathematical images as well as the role of analysis, synthesis, intuition, fantasy in mathematics teaching process are analyzed. The Chapter Four analyzes mathematical statements. It described in details the concept of theorem and the types of theorems. The Chapter Five reviews applying the key regulations of logic in teaching the school mathematics. The considerably large Chapter Six analyzes the place of syllogisms and proofs in teaching mathematics. In the Chapter Seven, an application of logic mathematical theory in solution of tasks is discussed upon. The large Chapter Eight analyzes the urgent problems of mathematical education, such as didactics of mathematics, hodegetics and psychology of mathematical education, putting a particular stress on the problems of developing logical thinking of pupils. In the Chapter Nine, the materials on the attempts of teachers to develop logical thinking of pupils in the process of teaching mathematics collected by the author while observing mathematical lessons at primary and higher classes of Lithuanian schools are provided. The results of interviewing teachers of primary schools and mathematics teachers processed using methods of mathematical statistics are discussed upon as well. In the Chapter Ten, the statistically processed analysis of the results of observing cadets of General Jonas Žemaitis Military academy of Lithuania in the period between the years 2000 and 2006, while the author was their lecturer of logic and integrated its statements with the mathematical skills of the cadets acquired at the secondary school. In the Conclusions, it is stressed that there are no considerable imperfections in development of logical thinking skills of pupils in the process of teaching mathematics; the introduction of state examinations in mathematics should be assessed positively and methodic assistance to teachers of primary school is good. A concern about insufficient methodic assistance to mathematics teachers of higher forms and feminization of Lithuanian school is expressed.

LITERATŪRA

1. **Aidukaitė A.** Logo Writer papildomojo ugdymo pamokose. – Žvirblių takas, 2000, Nr. 1.
2. **Ažubalis A.** Apie dalykinių ir tarpdalykinių ryšių reikšmę dėstant logiką. – Personalo vadybos teorijos ir praktikos aktualijos. Vilnius, 2006.
3. **Ažubalis A.** Apie loginio mąstymo ugdymą pradinių klasių matematikos pamokose Lietuvoje XX a. 7–9 dešimtmečiuose. – Lietuvos matematikos rinkinys. T. XLV. Vilnius, 2005.
4. **Ažubalis A.** Apie vidinę integraciją mokant matematikos pradinėse klasėse. – Pradinė mokykla: ugdymo turinys ir socialinė integracija. Klaipėda, 2004.
5. **Ažubalis A.** Iš Lietuvos matematinio švietimo praeities. Kaunas, 1993.
6. **Ažubalis A.** Iš Lietuvos matematinio švietimo praeities. II papild. leid. Kaunas, 1997.
7. **Ažubalis A.** Juozas Revuckas apie loginio mąstymo ugdymą geometrijos mokymo procese. – Lietuvos matematikos rinkinys. T. XLVI. Vilnius, 2006.
8. **Ažubalis A.** Kaip jaunieji anykštėnai mokomi matematikos? – Šilelis, 2007 03 17.
9. **Ažubalis A., Kiseliovas A.** Bendroji pradinės matematikos didaktika. Šiauliai, 2002.
10. **Ažubalis A.** Logikos pratimai. Vilnius, 2001.
11. **Ažubalis A.** Mačiau daug gerų matematikos mokytojų. – Gimtasis Rokiškis, 2007 01 23.
12. **Ažubalis A.** Matematika lietuviškoje mokykloje (XIX a. pr. – 1940 m.). Vilnius, 1997.
13. **Ažubalis A.** Matematikos didaktika Lietuvos pedagoginėje periodikoje (1945–1990 m.). Vilnius, 2005.
14. **Ažubalis A.** Matematikos mokymo lietuviškoje mokykloje raida (XIX a. pr. – 1940 m.). Vilnius, 1995.
15. **Ažubalis A.** Mokinių savarankiškumo ugdymas Lietuvos pradinių klasių matematikos pamokose (XX a. 6–9 dešimtmečiai). – Lietuvos matematikos rinkinys. T. XLIV. Vilnius, 2004.
16. **Ažubalis A.** Mažieji rokiškėnai gerose rankose. – Gimtasis Rokiškis, 2006 01 10.
17. **Ažubalis A.** Tarpdalykinių matematikos ir logikos ryšių realizavimas mokant Lietuvos karo akademijos kariūnus. – The development and perspecti-

ves of general and higner education (physics, mathematics, computer sciences). Šiauliai, 2004.
18. **Ažubalis A.** Turiningos pradinių klasių mokytojų pamokos. – Pradinė mokykla ir darnus vystymasis: nuo teorijos iki praktikos. Klaipėda, 2006.
19. **Bakštys A.**, **Bakštys G.** Matematika. Vilnius, 1995.
20. **Balčytis B.** Aritmetinių tekstinių uždavinių sprendimas pradinėse klasėse. Kaunas, 2000.
21. **Balčytis B.**, **Balčytienė J., Genienė D., Vaičiulienė A., Vainauskienė R.** Papildomos matematikos užduotys IV klasės stipresniesiems mokiniams. Kaunas, 1997.
22. **Balčytis B.**, **Balčytienė J., Genienė D., Vaičiulienė A., Vainauskienė R.** Papildomos matematikos užduotys III klasės stipresniesiems mokiniams. Kaunas, 1997.
23. **Balčytis B.** Kompiuterio „Elektronika BK 0010“ panaudojimas, mokant pirmaklasius matematikos. – Pedagoginių institutų mokymo metodikos tobulinimas aukštosios mokyklos pertvarkymo sąlygomis. Šiauliai, 1988.
24. **Balčytis B.** Skaičių koncentrų prasmė. – Žvirblių takas, 2002, Nr. 4.
25. **Balčytis B.** Skaičių šalis. Matematikos vadovėlis 2 klasei. Kaunas, 1999.
26. **Balčytis B.** Skaičių šalis. Matematikos vadovėlis 4 klasei. Kaunas, 1999.
27. **Balčytis B.** Skaičių šalis. Matematikos vadovėlis 1 klasei. Kaunas, 1999.
28. **Balčytis B.** Skaičių šalis. Matematikos vadovėlis 3 klasei. Kaunas, 1999.
29. **Balčytis B.** Papildomos užduotys stipresniems mokiniams. – Žvirblių takas, 2000, Nr. 3.
30. **Balčytis B.**, **Vaičiulienė A.** Skaičių šalis. Papildomos užduotys I klasės stipresniesiems mokiniams. Kaunas, 1997.
31. **Balčytis B., Vaičiulienė A.** Skaičių šalis. Papildomos užduotys II klasės stipresniesiems mokiniams. Kaunas, 1997.
32. **Banionis J.** Matematikos mokslo raida Lietuvoje 1920–1940 m. Vilnius, 1994.
33. **Beberman M.** An emerging Program of Secondary School. Mathematics. Cambridge, 1968.
34. a) Bendrojo lavinimo mokyklos bendrosios programos ir išsilavinimo standartai. Vilnius, 2003.
    b) Bendrosios programos ir išsilavinimo standartai XI–XII klasėms. Vilnius, 2003.
35. **Bitinas B.** Statistiniai metodai pedagogikoje ir psichologijoje Kaunas, 1974.
36. **Choquet G.** L‘analyse et Bourbaki. – L‘enseignement Mathématique, 1966, s. II, v. VIII.

37. **Cibulskaitė N.** Matematika XXI a. Vadovėlis V klasei. D. I. Vilnius, 2005.
38. **Cibulskaitė N.** Matematika XXI a. Vadovėlis V klasei. D. II. Vilnius, 2005.
39. **Cibulskaitė N.**, **Stričkienė M.** Matematika ir pasaulis. Vilnius, 1995.
40. **Čedavičienė D.**, **Butkienė A.** Kompiuterinės Logo Writer programos pritaikymas pradinėse klasėse. – Žvirblių takas, 1998, Nr. 3.
41. **Česnauskienė D.** Nepilnos kompiuterinės klasės naudojimo vizija darželyje-mokykloje. – Lietuvos mokykla XXI amžiuje. Klaipėda, 1997.
42. **Česnauskienė D.** Skaičių ir skaičiavimų mokymas(-is) pradinėje mokykloje. Klaipėda, 2004.
43. **Česnauskienė D.**, **Šeškaitė D.** Kompiuterinės matematikos mokomosios programos pirmoje klasėje. – Pradinė mokykla: kaita ir problemos. Klaipėda, 2000.
44. **Dekartas R.** Rinktiniai raštai, Vilnius, 1978.
45. **Dienes Z. P.** Building up mathematics. London, 1960.
46. **Drėgūnas V.**, **Rumšas P.** Bendroji matematikos mokymo metodika. Vilnius, 1984.
47. **Dumčiuvienė O.** Apie galvosūkius matematikos vadovėliuose. – Žvirblių takas, 1998, Nr. 6.
48. **Feller W.** Introduction to Probality. Wol. 1. New – York, 1957.
49. **Fréchet M. M.** L‘analyse générale et la question des fondements. Zürich, 1941.
50. **Freudenthal H.** Enseignement des mathématiques modernes ou enseignment moderne des mathématiques?. – L‘enseignement mathématique, 1963, s. II, v. IX.
51. **Freudenthal H.** Les tendances nouvelles de l‘enseignement mathématique. – Revue de l‘enseignement superieur, 1969, № 46 – 47.
52. **Fürst M.** Psichologija. Vilnius, 1998.
53. **Gedvilaitė Z.** Ketvirtokai kompiuterinėje skaičių šalyje. – Vieno kompiuterio panaudojimas mokykloje. Vilnius, 1998.
54. **Giržadienė D.** Matematikos mokymas taikant projekto „Gera pradžia“ metodiką. – Žvirblių takas, 1998, Nr. 5.
55. **Hiele van P. H.** La pensée de l‘enfant et la géometrie. – Bulletin de l‘APM, 1958, № 198.
56. **Hofšteterienė L., Šalnienė D.** Į vaiką orientuotas matematinis ugdymas. – Žvirblių takas, 2005, Nr. 2.
57. **Hofšteterienė L.**, **Šalnienė D.** Matematika visais pojūčiais. – Žvirblių takas, 2005, Nr. 1.

58. **Indrašienė V.** Didaktiniai žaidimai per matematikos pamokas. – Žvirblių takas, 2002, Nr. 1.
59. **Indrašienė V.** Projektų metodas per matematikos pamokas. – Žvirblių takas, 2004, Nr. 1.
60. **Kapiliorienė Z.** Kompiuteris ir pradinukų ugdymas. – Pradinių klasių matematika: patirtis, problemos, naujovės. Šiauliai, 1999.
61. **Kavaliauskaitė N.**, **Bartkevičienė R.** Sudominimas daina per matematikos pamokas. – Žvirblių takas, 2004, Nr. 2.
62. **Kiseliova D.** Kaip palengvinti matematikos mokymąsi. – Žvirblių takas, 2003, Nr. 5.
63. **Kiseliova D.** IV klasės mokinių matematikos pasiekimų/kitimo raidos testai. – Žvirblių takas, 1999, Nr. 1.
64. **Kiseliova D.** IV klasės mokinių matematikos pasiekimų testas. – Žvirblių takas, 2000, Nr. 4.
65. **Kiseliova D.** Ketvirtų klasių moksleivių matematiniai gebėjimai kaip didaktinės diagnostikos objektas. Daktaro disertacija. Šiauliai, 2002.
66. **Kiseliova D.** Matematikai gabių vaikų ugdymas. – Žvirblių takas, 2004, Nr. 4.
67. **Kiseliova D.**, **Kiseliovas A.** Aprašomoji statistika. – Žvirblių takas, 1998, Nr. 3.
68. **Kiseliova D.**, **Kiseliovas A., Donielienė I.** Ketvirtokų matematikos užduočių atlikimo analizė. – Žvirblių takas, 2003, Nr. 3.
69. **Kiseliova D.**, **Kiseliovas A., Drozd V.** Tekstinių uždavinių didaktika. Šiauliai, 2005.
70. **Kiseliova D.**, **Kiseliovas A.** Ketvirtokų geometrijos užduočių atlikimo analizė. – Žvirblių takas, 2003, Nr. 6.
71. **Kiseliova D., Kiseliovas A.,** Loginio mąstymo ugdymas pirmoje klasėje. – Lietuvos mokykla: istorija ir dabartis. Šiauliai, 1997.
72. **Kiseliova D.**, **Kiseliovas A.** Matematinių gebėjimų diagnostika. D. I. Šiauliai, 2004.
73. **Kiseliova D.**, **Kiseliovas A.** Matematinių gebėjimų diagnostika. D. II. Šiauliai, 2004.
74. **Kiseliovas A.**, **Gaidienė J.** Kaip gilinti skaičiaus sąvoką remiantis lietuvių tautosaka. – Žvirblių takas, 2002, Nr. 6.
75. **Kiseliovas A.**, **Kiseliova D.** Konstruktyvizmo idėjos matematikos pamokose. – Žvirblių takas, 2002, Nr. 1.
76. **Kiseliovas A.**, **Kiseliova D.** Matematikai gabių vaikų ugdymas. – Žvirblių takas, 1999, Nr. 6.

77. **Kiseliovas A.**, **Kiseliova D.** Matematikos pasaulyje. Vadovėlis II klasei. Vilnius, 1998.
78. **Kiseliovas A.**, **Kiseliova D.** Matematikos pasaulyje. Vadovėlis IV klasei. Vilnius, 2000.
79. **Kiseliovas A.**, **Kiseliova D.** Matematikos pasaulyje. Vadovėlis I klasei. Vilnius, 1996.
80. **Kiseliovas A.**, **Kiseliova D**. Matematikos pasaulyje. Vadovėlis III klasei. Vilnius, 1999.
81. **Kiseliovas A.**, **Kiseliova D.** Mintinio skaičiavimo įgūdžių formavimas. – Žvirblių takas, 2000, Nr. 2.
82. **Kiseliovas A.**, **Kiseliova D.** Skaičiaus ir skaitmens sąvokų formavimas I klasėje. – Žvirblių takas, 2002, Nr. 4.
83. **Kiseliovas A.**, **Rapalienė I., Stankuvienė R.** Simbolio vaidmuo mokant matematikos. – Žvirblių takas, 2002, Nr. 2.
84. **Kiseliova O.** Aktyvaus mokymosi metodai mokant matematikos pradinėse klasėse. – Žvirblių takas, 2001, Nr. 6.
85. **Kisieliūtė E.** Matematikos pamokos gamtoje. – Žvirblių takas, 2002, Nr. 3.
86. **Kisieliūtė E.** Origamis mokant geometrijos II klasėje. – Žvirblių takas, 1999, Nr. 6.
87. **Kisieliūtė E.** Vaikų loginio mąstymo ugdymas per matematikos pamokas. – Žvirblių takas, 1998, Nr. 6.
88. **Komenskis J. A.** Didžioji didaktika. – Rinktiniai pedagoginiai raštai. Kaunas, 1986.
89. **Končius I.** Matematikos kelias. – Švietimo darbas, 1927, Nr. 1.
90. **Kubilienė G.** Statistikos pradmenų mokymas kompiuteriu. – Pradinių klasių matematika: patirtis, problemos, naujovės. Šiauliai, 1999.
91. **Kupčiūnas K., Kalninis J., Trinkūnas J.** Skaičiavimo uždaviniai. D. II. Kaunas, 1930.
92. **Mališauskienė V.** Kaip mokyti skaičiaus sandaros. – Žvirblių takas, 1999, Nr. 2.
93. Matematika. – Nacionalinis mokinių pasiekimų tyrimas: dalykinė ataskaita. Vilnius, 2005.
94. **Matiuchinas V.** Etiudai apie matematikus. Vilnius, 2003.
95. **Myers D. G.** Psichologija. Vilnius, 2000.
96. **Minkuvienė D.**, **Kuzavinienė D.** Kūrybiškumo ugdymas mokant ekonomikos pradmenų. – Žvirblių takas, 2004, Nr. 6.
97. **Minkuvienė D.**, **Kuzavinienė D.** Kūrybiškumo ugdymas mokant geometrijos ir skaičiavimo. – Žvirblių takas, 2004, Nr. 3.

98. **Minkuvienė D.**, **Kuzavinienė D.** Kūrybiškumo ugdymas mokant tikimybių teorijos ir sprendžiant problemas. – Žvirblių takas, 2004, Nr. 5.
99. Pradinė mokykla ir darnus vystymasis: nuo teorijos iki praktikos. Klaipėda, 2006.
100. Pradinė mokykla: kaita ir problemos. Klaipėda, 2000.
101. Pradinė mokykla: ugdymo turinys ir socialinė integracija. Klaipėda, 2004.
102. Pradinio ugdymo problemos. Šiauliai, 1992.
103. Pradinių klasių matematika: patirtis, problemos, naujovės. Šiauliai, 1999.
104. **Ramanauskienė E., Ragulskienė O.** Žaidimai „Matematikos pasaulyje“. – Žvirblių takas, 1998, Nr. 5.
105. **Rimiškienė R.** Matematiniai žaidimai, skirti mokyti skaičių sandaros. – Žvirblių takas, 2000, Nr. 3.
106. **Rudienė A.** Matematinių sugebėjimų ir gabių matematikai vaikų ugdymas. – Žvirblių takas, 2004, Nr. 1.
107. **Stanaitienė D.** Integruoto ugdymo projektas „Knygos“ IV klasėje. – Žvirblių takas, 2001, Nr. 5.
108. **Strazdas V.** TIMSS tyrimas – ir koziris, ir aliarmas. – Dialogas, 2005 01 14.
109. **Ušinskis K.** Rinktiniai pedagoginiai raštai. T. II. Kaunas, 1959.
110. **Vanagaitienė L.** Žaidimai skaičiavimo įgūdžiams įtvirtinti. – Žvirblių takas, 1999, Nr. 2.
111. **Vainbergas S.** Trupmenų daugybos ir dalybos veiksmų technikos aiškinimas. – Lietuvos mokykla, 1937, Nr. 6.
112. **Vaitkevičiūtė V.** Tarptautinių žodžių žodynas. Vilnius, 2001.
113. Visuotinė lietuvių enciklopedija. T. VIII. Vilnius, 2005.
114. **Адлер М.** О некоторых педагогических аспектах теорий Ж. Пиаже и Дж. С. Брунера. – Педагогика и школа за рубежом. Вып. 6. Москва, 1969.
115. **Ажубалис А., Гингулис Э.** Шестнадцать научных семинаров и конференций по дидактике математики и истории её развития в Балтийских странах. – 5. starptautiskā – zinātniskā konference „Matemātikas mācīšana: vēsture un perspektīvas“. Liepāja, 2005.
116. **Ажубалис А.** Реализация межпредметных связей математики и логики в обучении курсантов военной академии. – Teaching mathematics: retrospective and perspectives. Tallinn, 2003.
117. **Арива К.** Аксиоматический метод в школьной математике в Эстонской ССР. – О проблемах преподавания курса математики в школах Эстонской ССР. Таллинн, 1982.

118. **Брунер Д.** Процесс обучения. Москва, 1962.
119. **Бородин А. И., Бугай А. С.** Биографический словарь деятелей в области математики. Киев, 1979.
120. **Бурбаки Н.** Очерки по истории математики. Москва, 1963.
121. **Джонсон Ф. С.** Роль аксиоматики и решение задач по математике. Москва, 1966.
122. **Гальперин П. Я.** Основные результаты исследований по проблеме формирования умственных действий и понятий. Москва, 1965.
123. **Каплан Б. С., Рогановский Н. М., Рузин Н. К., Столяр А. А.** Практикум по педагогике математики. Минск, 1978.
124. **Кар Ч.**, **Хоув Ч.** Качественные методы принятия решений в управлении и экономике. Москва, 1966.
125. **Клейн Ф.** Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. I. Москва, 1935.
126. **Колмогоров А.** Научные основы школьного курса математики. – Математика в школе, 1969, № 3.
127. **Колягин Ю. М., Оганесян В. В., Саннинский В. Я., Луканкин Г. Л.** Методика преподавания математики в средней школе. Москва, 1975.
128. **Крутецкий В. А.** Психология. Москва, 1980.
129. **Крутецкий В. А.** Психология математических способностей школьников. Москва, 1968.
130. **Кудрявцев Л. Д.** Современная математика и ее преподавание. Москва, 1980.
131. **Лезан К. А.** Развитие математической инициативы. Москва, 1908.
132. **Маркушевич А. И.** Вопросы преподавания математики на XIX конференции в Женеве. – Математическое просвещение, 1957, № 1.
133. Общая психология. Москва, 1970.
134. Основные направления исследований психологии мышления в капиталистических странах. Москва, 1966.
135. **Пойя Д.** Как решать задачу. Москва, 1961.
136. **Пойя Д.** Математика и правдоподобные рассуждения. Москва, 1975.
137. **Пойя Д.** Математическое открытие. Москва, 1970.
138. **Репьев В. В.** Общая методика преподавания математики. Москва, 1958.
139. **Рубинштейн С. Л.** О мышлении и путях его исследования. Москва, 1958.
140. **Сойер У. У.** Прелюдия к математике. Москва, 1972.
141. **Столяр А. А.** Педагогика математики. Минск, 1974.
142. **Сухомлинский В. А.** О воспитании. Москва, 1975.

143. **Ушинский К. Д.** Собрание сочинений. Т. X. Москва – Ленинград, 1949.
144. **Ушинский К. Д.** Собрание сочинений. Т. V. Москва – Ленинград, 1948.
145. **Флейвелл Д. Х.** Генетическая психология Жана Пиаже. Москва, 1967.
146. **Фрейденталь Г.** Математика как педагогическая задача. Ч. I. Москва, 1982.
147. **Хинчин А. Я.** О воспитательном эффекте уроков математики. – Математика как профессия. Москва, 1980.
148. **Шохор–Троцкий С. И.** Геометрия на задачах (основной курс). Москва, 1913.
149. **Ярошевский М. Г.** Иван Михайлович Сеченов. Ленинград, 1968.

SUTRUMPINIMAI

ESM – elektroninė skaičiavimo mašina
KU – Klaipėdos universitetas
IA – ikimokyklinis auklėjimas
LKA – Lietuvos karo akademija
LNK – laisvas nepriklausomas kanalas (televizijos programa)
LŽŪU – Lietuvos žemės ūkio universitetas
MEMA – matematinis empirinės medžiagos aprašymas
MMLS – matematinės medžiagos loginis sutvarkymas
OECD – *Organization for Economic Cooperation and Development* (Ekonominio bendradarbiavimo ir plėtros organizacija)
PI – pedagoginis institutas
PUPM – pradinio ugdymo pedagogika ir metodika
RKL – rusų kalba ir literatūra
RMTI – Respublikinis mokytojų tobulinimosi institutas
SSRS – Sovietų Socialistinių Respublikų Sąjunga
ŠPI – Šiaulių pedagoginis institutas
ŠU – Šiaulių universitetas
TEV – Tadeušas, Elmundas, Vytautas (leidyklos steigėjai)
TIMSS – *Third International Mathematics and Science Study* (Trečioji tarptautinė matematikos ir gamtos mokslų studija)
TT – teorijos taikymas
UNESCO – *United Nations Educational, Scientific and Cultural organization* (Jungtinių Tautų Švietimo, mokslo ir kultūros organizacija)
VGTU – Vilniaus Gedimino technikos universitetas
VE – valstybinis egzaminas
VPU – Vilniaus pedagoginis universitetas
VU – Vilniaus universitetas
VVPI – Vilniaus valstybinis pedagoginis institutas

ASMENVARDŽIŲ RODYKLĖ

L

M

N

VIETOVARDŽIŲ RODYKLĖ

Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademija

Algirdas Ažubalis

LOGIKA IR MOKYKLINĖ MATEMATIKA

Monografija

Redagavo Eulialija Stankevičienė
Maketavo Dalia Žukaitienė

2008-   . Tiražas   egz. Užsakymas   .
Išleido Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademija,
Šilo g. 5A, Vilnius LT-10322
Spausdino